ISBN: 978-93-100-0122-8

वैदिक गणित के व्यावहारिक अनुप्रयोग: एक अध्ययन



डॉ० राजीव अग्रवाल

प्रदीप कुमार

वसुंधरा सिंह

वैदिक गणित के व्यावहारिक अनुप्रयोग: एक अध्ययन

डॉ० राजीव अग्रवाल

एसोसिएट प्रोफ़ेसर– शिक्षक शिक्षा विभाग

अतर्रा पोस्ट ग्रेजुएट कॉलेज, अतर्रा,

बाँदा (उत्तर प्रदेश)

प्रदीप कुमार

बी०एस०सी०(गणित), एम० एड०

वसुंधरा सिंह

बी०एल०एड०

वैदिक गणित के व्यावहारिक अनुप्रयोग: एक अध्ययन

डॉ० राजीव अग्रवाल

प्रदीप कुमार

वसुंधरा सिंह

E- book संस्करण: 2023

मूल्य-₹51

ISBN-978-93-100-0122-8

प्रकाशक—

वसुंधरा सिंह

पता– गौरव कॉलोनी,

गौरव गेस्ट हाउस के पास,

मऊरानीपुर, जिला– झांसी

पिन कोड– 284204

ईमेल- baharsingh1432@gmail.com

प्राक्कथन

आज हम बिना गणित के अपने जीवन में एक दिन की भी कल्पना नहीं कर सकते हैं, क्योंकि दैनिक जीवन की समस्याओं के हल के लिए हमें किसी न किसी रूप में गणित पर ही आश्रित रहना होता है। गणित अपने चारों ओर के वातावरण से हमें सम्पर्क करने व विश्व के प्रति हमारी समझ को बढ़ाने में महत्वपूर्ण साधन है। गणित किसी प्राकृतिक स्रोत के समान हमारे चारों ओर है जिसे हम आसानी से अनुभव कर सकते हैं। कोई भी व्यक्ति चाहे वह मजदूर, किसान, व्यापारी, गृहिणी, डॉक्टर तथा वकील हो वह प्रतिदिन गणित के अंकों और सिद्धांतों का उपयोग करता है। कार्यालय, अखबार, खेल का मैदान हर जगह गणित का अस्तित्व है। प्रत्येक व्यक्ति को अपनी जीविका कमाने के लिए प्रत्यक्ष या अप्रत्यक्ष रूप से गणित की आवश्यकता होती है। हम अपने दैनिक जीवन की कई प्रकार की समस्याओं को गणित के माध्यम से आसानी से हल कर सकते हैं। वैदिक गणित सीखने के कई लाभ हैं विद्यार्थियों में समस्या हल करने की क्षमता विकसित होती है और यह रचनात्मक बुद्धि के विकास की ओर भी ले जाती है।

प्रस्तुत पुस्तक का शीर्षक "वैदिक गणित के व्यवहारिक अनुप्रयोग: एक अध्ययन" है। इस पुस्तक को पांच अध्यायों में विभाजित किया गया है।

प्रथम अध्याय में भारत में उच्च प्राथमिक शिक्षा का स्वरूप, पाठ्यक्रम में गणित का स्थान, गणित शिक्षण का महत्व, शिक्षण की विधियां, गणित का इतिहास, गणित शिक्षण की समस्याएँ, वैदिक गणित अध्ययन के उद्देश्य, शोध विधि एवं अध्ययन का महत्त्व सार्थकता का वर्णन किया गया है।

द्वितीय अध्याय में गणितीय कुशलता से संबंधित शोध अध्ययन एवं वैदिक गणित से संबंधित शोध अध्ययन की समीक्षा की गई है।

तृतीय अध्याय में नौ चयनित वैदिक गणित संक्रियाएँ- व्यंजकों का गुणनफल, बीजगणित व्यंजकों का योग, बीजगणित व्यंजकों का घटाव, युगपत समीकरण, सारणिक का मान ज्ञात करना, आव्यूह का व्युत्क्रम, वर्ग समीकरण, वर्गमूल और अनुलोम समानुपात/ प्रतिलोम समानुपात को सविस्तार समझाया गया है।

चतुर्थ अध्याय में कक्षा 6,7,8 व 12 में विभिन्न वैदिक गणित संक्रियाओं के समावेशन हेतु सुझावात्मक प्रारूप प्रस्तुत किया गया है।

पंचम अध्याय में निष्कर्ष, शैक्षिक उपादेयता, अध्ययन के सुझाव एवं भावी शोध के निमित्त सुझाव प्रस्तुत किए गए हैं ।

प्रस्तुत पुस्तक लघु शोध-प्रबंधन पर आधारित है। प्रत्येक शोध कार्य उद्देश्यपरक होता है और यह उद्देश्य तभी सार्थक हो सकता है। जब शोध कार्य के परिणामों का उचित क्रियान्वयन किया जाए इस कार्य के लिए शोध कार्य को जनमानस के लिए सुलभ बनाने की नितांत आवश्यकता होती है। एक पुस्तक के रूप में शोध कार्य को प्रकाशित करने से यह कार्य सुगमता से पूर्ण हो सकता है। शोध कार्य के पुस्तक के रूप में प्रकाशन से वैज्ञानिक ज्ञान में वृद्धि होती है तथा अन्य बुद्धिजीवियों को अनेक क्षेत्रों में नवीन अनुसंधान करने की प्रेरणा भी प्राप्त होती है। प्रस्तुत पुस्तक इसी दिशा में किया गया एक प्रयास है। यह पुस्तक निश्चित ही वैदिक गणित के व्यवहारिक अनुप्रयोगों पर प्रकाश डालने में सहायक सिद्ध होगी।

इस पुस्तक के सृजन में संदर्भ ग्रंथ सूची में उल्लिखित विभिन्न पुस्तकों का सहयोग लिया गया है। हम सभी के प्रति कृतज्ञता प्रकट करते हैं। प्रस्तुत पुस्तक में अनेक त्रुटियां होना स्वाभाविक है। अतः यदि अनुभवी विद्वतगण अवगत कराने का कष्ट करेंगे तो, हम अत्यंत आभारी रहेंगे और आगामी संस्करणों में उन त्रुटियों को दूर कर सकेंगे।

डॉ० राजीव अग्रवाल
प्रदीप कुमार
वसुंधरा सिंह

अनुक्रमणिका

अध्याय	विषय सूची	पृष्ठ संख्या
प्रथम अध्याय	**अध्ययन परिचय**	**1-70**
1.1	प्रस्तावना	1
1.1.1	शिक्षा: विकास की प्रक्रिया	7
1.1.2	भारत में शिक्षा के स्तर	21
1.1.3	भारत में उच्च प्राथमिक शिक्षा का स्वरूप	22
1.1.4	पाठ्यक्रम में गणित का स्थान	23
1.1.5	गणित शिक्षण का महत्त्व	26
1.1.6	गणित शिक्षण की विधियाँ	28
1.1.7	गणित: तार्किक अभिक्षमता का आधार	35
1.1.8	गणित-अर्थ, परिभाषा और उद्देश्य	36
1.1.9	गणित का इतिहास	40
1.1.10	गणित शिक्षण की समस्याएँ	48
1.1.11	वैदिक गणित	50
1.1.11.1	वैदिक गणित का परिचय	51
1.1.11.2	वैदिक गणित का इतिहास	51
1.1.11.3	वैदिक गणित का विकास	52
1.1.11.4	वैदिक गणित के सोलह सूत्र, अर्थ एवं उपयोग	53
1.1.11.5	वैदिक गणित के उपसूत्र	57
1.1.11.6	वैदिक गणित की आवश्यकता	58
1.2	समस्या का प्रादुर्भाव	59
1.3	अध्ययन की आवश्यकता	61
1.4	समस्या कथन	61
1.5	समस्या में प्रयुक्त पदों की परिभाषा	62
1.5.1	वैदिक गणित	62
1.5.2	व्यावहारिक अनुप्रयोग	62
1.5.3	अध्ययन	63

1.6	अध्ययन के उद्देश्य	63
1.7	अध्ययन का परिसीमन	63
1.8	शोध विधि	64
1.9	अध्ययन का महत्त्व एवं सार्थकता	69
द्वितीय अध्याय	**सम्बन्धित साहित्य का सर्वेक्षण**	**71-79**
2.1	प्रस्तावना	71
2.2	गणितीय कुशलता से सम्बन्धित शोध अध्ययन	73
2.3	वैदिक गणित से सम्बन्धित शोध अध्ययन	76
2.4	समीक्षात्मक निष्कर्ष	79
तृतीय अध्याय	**चयनित वैदिक गणित संक्रियाएँ**	**80-104**
3.1	व्यंजको का गुणनफल	80
3.2	बीजगणितीय व्यंजको का योग	85
3.3	बीजगणितीय व्यंजको का घटाव	87
3.4	युगपत समीकरण	90
3.5	सारणिक का मान ज्ञात करना	93
	(अ)तृतीय कोटि के सारणिक	
	(ब)चतुर्थ कोटि के सारणिक	
3.6	आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात करना	96
3.7	वर्ग समीकरण /द्विघात समीकरण	97
3.8	वर्गमूल	101
3.9	अनुलोम समानुपात/प्रतिलोम समानुपात	104
चतुर्थ अध्याय	**पाठ्यक्रम में समावेशन**	**107-143**
4.1	कक्षा-7 व्यंजको का गुणनफल	107
4.2	कक्षा-6 बीजगणितीय व्यंजको का योग	114
4.3	कक्षा-6 बीजगणितीय व्यंजको का घटाव	119
4.4	कक्षा-8 युगपत समीकरण	121

4.5 कक्षा-12 सारणिक का मान ज्ञात करना 125

4.6 कक्षा-12 आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात करना 129

4.7 कक्षा-8 वर्ग समीकरण /द्विघात समीकरण 134

4.8 कक्षा-8 वर्गमूल 138

4.9 कक्षा- 7 अनुलोम समानुपात/प्रतिलोम समानुपात 143

पंचम अध्याय **निष्कर्ष एवं सुझाव** 151-153

5.1 निष्कर्ष 151

5.2 शैक्षिक उपादेयता 152

5.3 अध्ययन के सुझाव 152

5.4 भावी शोध के निमित्त सुझाव 153

सन्दर्भ ग्रन्थ सूची

परिशिष्ट

(1) वैदिक गणितज्ञ

(ब) वैदिक गणित पुस्तकें

प्रथम अध्याय
अध्ययन परिचय

1.1 प्रस्तावना

शिक्षा एक सामाजिक प्रक्रिया है। तथा गणित इसका एक महत्त्वपूर्ण अंग है। प्राचीनकाल से ही गणित के पठन-पाठन तथा प्रयोगों के विभिन्न प्रमाण मिलते रहे हैं। आज के वैज्ञानिक युग में गणित का अपना विशेष महत्त्व है। परन्तु आज विद्यार्थियों में गणित के प्रति अरुचि तथा उनके कौशलों में कमी परिलक्षित होती है। अत: यदि सामान्य गणित के स्थान पर प्राचीन वैदिक गणित की सरलीकृत विधियाँ पाठ्यक्रम में सम्मिलित कर दी जाएँ तो छात्र मनोरंजकपूर्वक गणित का अध्ययन कर सकेंगे। प्रस्तुत अध्ययन इसी दिशा में एक प्रयास है। शिक्षा एक ऐसा माध्यम है जिसके द्वारा व्यक्ति के पारस्परिक संबंधों का निर्धारण शिक्षा के द्वारा ही होता है। बालकों की अन्तर्निहित शक्तियों का विकास करना ही शिक्षा का उद्देश्य है। शिक्षा की प्रक्रिया को सुचारु व सुव्यवस्थित ढंग से चलाने के लिए औपचारिक साधन की आवश्यकता होती है और यह साधन है-विद्यालय।

भारत में प्राचीन काल में छात्रों को गुरुकुल में शिक्षा दी जाती थी। उन्हें बालू व रेत पर लिखना सिखाया जाता था। गिनती सिखाने के लिए एक यन्त्र का प्रयोग किया जाता था, जिसे गिनतारा कहते थे। कुछ समय पश्चात् पटिया या पाटी का प्रयोग किया जाने लगा। इसलिए गणित का नाम पाटी गणित भी पड़ गया। स्लेट का आविष्कार बहुत बाद में हुआ और कागज़ का आधुनिक युग में।

भारत की शिक्षा व्यवस्था में गणित एक प्रमुख विषयों में से एक था। कौटिल्य के अर्थशास्त्र के अनुसार चूड़ाकर्म के बाद छात्र को लिपि और संख्या सीखने का ज्ञान होना चाहिए। हाथी गुम्फा के लेख से ज्ञात होता है की कलिंग नरेश 'खारवेल' के अपने जीवन के नौ वर्ष लिपि व ड्राइंग रेखागणित व अंकगणित सीखने में बिताये थे। राजकुमार गौतम ने भी

8 वर्ष की अवस्था में गणित सीखा था। जैन ग्रंथों में भी गणित के अध्ययन के सूत्र मिलते हैं।

प्राचीन भारत में गणित पढ़ाने का उद्देश्य वस्तुओं के मूल्य निकलवाने में और हिसाब रखने में किया जाता था। उस समय कार्य-प्रणाली की अपेक्षा फल पर अधिक जोर दिया जाता था। छात्रों को पहाड़े तथा गुर सिखाये जाते थे। विद्यालयों में गणित इसलिए उस समय पढ़ाया जाता था क्योंकि इसका सम्बन्ध धर्म पुस्तकों, गणित-ज्योतिष, फलित ज्योतिष आदि से था।

आज के वैज्ञानिक युग में गणित का अपना विशेष महत्व है। इसलिए विद्यालयी पाठ्यक्रम में गणित को अनिवार्य विषय के रूप में रखा गया है। लेकिन छात्र गणित में अधिक कमजोर पाए जाते हैं तथा विद्यार्थियों के दिमाग में यह भूत सवार रहता है कि गणित एक कठिन विषय है। इसलिए आज आवश्यकता इस बात की है कि गणित विषय को किस प्रकार सरल और रुचिकर बनाया जाए जिससे छात्र पुनः रुचिपूर्वक गणित विषय का अध्ययन कर सकें। इसके साथ-साथ छात्रों को उनके गुणों एवं कौशलों से परिचित कराया जाए।

शोधकर्त्ता ने एक गणित अध्यापक होने के नाते यह स्वयं अनुभव किया है कि गणित में सबसे अधिक छात्र अनुत्तीर्ण होते हैं जिसका प्रमुख कारण गणित की जटिल विधियाँ हैं। अतः यदि सामान्य गणित के स्थान पर प्राचीन वैदिक गणित की सरलीकृत विधियाँ पाठ्यक्रम में सम्मिलित कर दी जाए तो छात्र मनोरंजनपूर्वक गणित का अध्ययन कर सकेंगे।

अत: शोधकर्त्ता ने समयाभाव के कारण पुस्तकों के अध्ययन के फलस्वरूप वैदिक गणित की विविध विधियों का तथा गणित की विभिन्न संक्रियाओं का अध्ययन किया है।

वेदों से वैदिक गणित का उद्गम हुआ है। वेद का शाब्दिक अर्थ है, संपूर्ण ज्ञान का उद्गम स्रोत और असीमित भंडार। अर्थात, वेदों में जीवन उपयोगी ज्ञान की समस्त बातें हैं।

वैदिक गणित अति सुंदर वैदिक सूत्रों का संग्रह है जो वेदों से लिया गया है और जिसकी



जगद्गुरु शंकराचार्य श्री भारती कृष्ण तीर्थ जी महाराज

खोज परम श्रद्धेय जगद्गुरु शंकराचार्य श्री भारती कृष्ण तीर्थ जी महाराज ने की है। स्वामी जी जो स्वयं एक महान विद्वान है, उन्होंने ही पूरी दुनिया को यह अनुपम भेंट दी है। वैदिक गणित का मूल स्रोत अथर्ववेद है, जहां से स्वामी जी ने सभी सूत्रों और उप-सूत्रों की खोज 1911 से 1918 के बीच की है। स्वामी जी ने वेदों और उपनिषदों की गहन खोज के बाद इन्हें पुनः प्रतिपादित किया है। इनकी मदद से हमें गणित के सवालों को हल करने में समय की काफी बचत होती है। जैसे कि हमारे शास्त्रों में लिखा है-

युक्तियुक्तं वचो ग्राह्यं बालादपि शुकादपि ।

अयुक्तमपि न ग्राह्यं साक्षादपि वृहस्पतेः ॥ (संस्कृत सुभाषितस)

(यदि कोई युक्तियुक्त बात आप से कही जाती है, चाहे वह एक बालक या एक बोलने वाले तोते द्वारा कही गई हो, तो उसे ग्राह्य करना श्रेयस्कर है। परंतु कोई अयुक्तियुक्त बात यदि साक्षात देवगुरु वृहस्पति भी आपसे कहें तो उसे नहीं मानना चाहिए।)

वैदिक गणित उस वायु का नाम है जिसने तेजी से गणना के क्षेत्र में बदलाव का बवंडर खड़ा कर दिया है। यह सभी गणितीय गणना को पारंपरिक विधि की तुलना में अधिक गति के साथ हल करने का आसान तरीका है। आजकल, इसे उन विद्यार्थियों के लिए सीखना नितांत आवश्यक हो गया है जो कुछ सेकंड में सटीक गणना करना चाहते हैं।

CAT, XAT, UPSC, SSC, NTSE तथा बैंकिंग की परीक्षा में बैठने वाले विद्यार्थियों ने वैदिक गणित विधियों का प्रयोग जोड़, घटाव, गुणा, भाग और वर्ग, वर्गमूल, घन, घनमूल इत्यादि के अंकगणितीय सवालों को हल करने के लिए शुरू कर दिया है, और इससे उनका काफी समय बचता है । सभी 16 सूत्र गणित के विभिन्न विषयों से जुड़े हैं। एक वाक्य के मुहावरों जैसे ये सूत्र आसानी से समझे और याद किए जा सकते हैं। गणितीय सवालों को हल करने में उनकी क्षमता का बोध उनके शाब्दिक अर्थों से ही लग जाता है। इन 16 सूत्रों का प्रयोग अंकगणित से बीज गणित और ज्यामिति से कलन (calculus) तथा त्रिकोणमिति तक के सवालों को हल करने के लिए किया जा सकता है।

वैदिक गणित के महत्व को इस तथ्य से ही समझा जा सकता है कि गणित के जटिल सवालों को हल करने में सामान्य तौर पर कई चरणों की प्रक्रिया अपनानी पड़ती है, जबकि वैदिक गणित में मन ही मन या कुछ सेकेंड में आप उत्तर प्राप्त कर सकते हैं। यह सूत्र आपस में इतनी सुंदरता से एक दूसरे से जुड़े हैं कि एक सूत्र का इस्तेमाल कई अंकगणितीय सवालों को हल करने के लिए किया जा सकता है। यही नहीं, वैदिक गणित की सुंदरता का अंदाजा इस बात से भी लगाया जा सकता है कि इसमें नए-नए प्रयोगों की पर्याप्त संभावना है। सभी मूलभूत प्रक्रियाओं को अलग-अलग विधियों से पूरा किया जा सकता है और विद्यार्थियों के पास उस विधि के इस्तेमाल की स्वतंत्रता है, जिसमें वे अपने आप को सहज महसूस करते हैं। एक आम इंसान भी वैदिक विधि को सीख ले तो किसी भी 5-5 अंकों की संख्याओं को 20 सेकंड से कम समय में गुणा कर सकता है और वह भी सिर्फ एक पंक्ति में इस तरह किसी का भी आत्मविश्वास बढ़ सकता है, तथा मन में भय नहीं रह जाता। वैदिक गणित सभी के लिए महत्वपूर्ण और सीखने योग्य है।

वैदिक गणित को वैदिक इसलिए कहा जाता है क्योंकि यह वेदों से संबंधित है। इसका उद्गम चौथे वेद अथर्ववेद से माना गया है। वैदिक गणित अंकगणित व बीजगणित की गणनाएं आसानी से करने में हमारी सहायता करती है। भारती कृष्ण तीर्थ जी ने वैदिक गणित के अंतर्गत 16 सूत्र तथा 13 उपसूत्र दिए जिनकी सहायता से गणित की किसी की समस्या को आसानी से हल किया जा सकता है। सूत्र किसी भी गणितीय ये समस्या को

आसानी से हल करने में हमारी सहायता करते हैं। जिन्हें गणित सूत्र कहा जाता है। गणित सूत्रों को शूल्व सूत्र भी कहा जाता है। ये सभी सूत्र संस्कृत भाषा की व्याकरण में लिखे गए हैं। भारती कृष्ण तीर्थ जी ने महसूस किया कि उनके द्वारा लिखे गए 16 सूत्र गणित की सभी समस्याओं को जैसे-अंकगणित, बीजगणित, ज्यामिति, त्रिकोणमिति, समतल वृत्तीय ज्यामिति को हल करने में सहायक है। वैदिक गणित के अंतर्गत विद्यार्थियों में आत्मविश्वास होता है कि केवल एक ही सही रास्ता है। गणितीय क्रियाओं को हल करने का और वो है वैदिक गणित।

वैदिक गणित के सोलह सूत्र निम्न प्रकार हैं–

सोलह सूत्र–

1. एकाधिकेन पूर्वेण
2. निखिल नवतश्चरमं दशतः
3. ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्
4. परवर्त्य योजयेत्
5. शून्य साम्यसमुच्चये
6. (आनुरूप्ये) शून्यमन्यत्
7. संकलनव्यवकलनाभ्याम्
8. पूरणापूरणाभ्याम्
9. चलनकलनाभ्याम्
10. यावदूनम्
11. व्यष्टिसमष्टिः

12. शेषाण्यड्केन चरमेण

13. सोपान्त्यद्वयमन्त्च्यम्

14. एकन्यूनेन पूर्वेण

15. गुणितसमच्चयः

16. गुणकसमुच्चयः

इन सोलह सूत्रों के अतिरिक्त भारती कृष्ण तीर्थ जी ने तेरह अन्य उपसूत्र भी दिए जो निम्न प्रकार हैं

तेरह उपसूत्र:

1. आनुरूप्येण

2. शिष्यते शेषसंज्ञः

3. आधमाधेनान्त्यमन्त्येन

4. केवलैः सप्तकं गुण्यात्

5. वेष्टनम्

6. यावदूनं तावदूनं

7. यावदूनं तावउदूनीकृत्य वर्ग च योजयेत्

8. अन्त्ययोर्द्दशकेडपि

9. अन्त्ययोरेव

10. समुच्चयगुणितः

11. लोपनस्थापनाभ्यां

12. विलोकनं

13. गुणकसमुच्चयः

इन सोलह सूत्र तथा तेरह उपसूत्रों द्वारा लगभग गणित की सभी शाखाओं को सम्मिलित कर लिया जाता है। इन सूत्रों द्वारा बड़ी संख्या की जटिल समस्याओं को भी आसानी से हल किया जा सकता है। इन सूत्रों के नियमों का उपयोग कर किसी समस्या को हल करने में अधिक समय बचाया जा सकता है।

1.1.1 शिक्षा: विकास की प्रक्रिया

शिक्षा जीवन पर्यन्त चलने वाली प्रक्रिया है। व्यक्ति औपचारिक तथा अनौपचारिक साधनों से जीवन भर शिक्षा प्राप्त करता रहता है। वह अपने दैनिक जीवन में अपने वातावरण एवं परिवेश के साथ अन्त: क्रिया करते हुए अनेक अनुभव प्राप्त करता है। इन अनुभवों से जो ज्ञान उसे प्राप्त होता है वही व्यापक अर्थ में शिक्षा है। विद्यालय जीवन में प्राप्त शिक्षा भी इस व्यापक शिक्षा का एक अंग है। शिक्षा ऐसी प्रक्रिया है जो जन्म काल तथा प्रकृति प्रदत्त शक्तियों का विकास करती है। शिक्षा व्यक्ति को सभ्य एवं सुसंस्कृत नागरिक बनाती है। शिक्षा के इतने महत्वपूर्ण योगदान के कारण आज समाज में शिक्षा को महत्वपूर्ण स्थान दिया गया है।

शिक्षा मानव विकास का मूल साधन हैं। इससे मानव की जन्मजात शक्तियों का विकास होता है। ज्ञान कला और कौशल में वृद्धि होती है। इतना ही नहीं मनुष्य के व्यवहार में भी परिवर्तन आता है। शिक्षा क्या है ? विद्या क्या है ? इस पर वेदों पुराणों उपनिषदों में कुछ लिखा हुआ मिलता है। आदिम युग के बाद जब भी मानव ने शिक्षा के अर्थ को समझा होगा और अपने को शिक्षित करने का बीड़ा उठाया होगा तभी से शिक्षा का अर्थ ज्ञात हुआ होगा। वेदों में शिक्षा को एक अंग के रूप में स्वीकार किया गया है। शिक्षा शब्द संस्कृत भाषा के शिक्ष् धातु से बना है जिसका अर्थ है। ज्ञानोपार्जन अथवा सीखना है। मानव अपने

अनुभव से हमेशा ही कुछ न कुछ सीखता रहा है पाषाण युग से मशीन युग तक शिक्षा के उद्देश्य, कार्य, तत्व, क्षेंत्र परिवर्तित होते रहें हैं।

शिक्षा विकास का मूल साधन है। शिक्षा के जरिए मनुष्य के ज्ञान एवं कला कौशल में वृद्धि करके उसके अनुवांशिक गुणों को निखारा जा सकता है और उसके व्यवहार को परिमार्जित किया जा सकता है। शिक्षा व्यक्ति की बुद्धि, बल और विवेक को उत्कृष्ट बनाती है। शिक्षा के अभाव में व्यक्ति का जीवन पशु के समान प्रतीत होता है इसी कारण भारत में शिक्षा के लोकव्यापीकरण का लक्ष्य रखा है।

शिक्षा का अर्थ

आधुनिक संदर्भ में **शिक्षा** शब्द की उत्पत्ति **लैटिन** भाषा के शब्द **Educatum** से हुई है। जिसका अंग्रेजी अनुवाद **Education** है। **Education** का अर्थ **शिक्षण की कला**। इसी का समानार्थी शब्द **Educare** है To bring up उठाना To bring forth सामने लाना To lead out नेतृत्व देना इत्यादि सभी अर्थ शिक्षा की क्रिया या प्रतिक्रिया का संकुचित या व्यापक आधार प्रस्तुत करते है।

दूसरे अर्थो में Eductaion दो शब्दों से मिलकर बना है। E+Duco E का अर्थ आन्तरिक Duco का अर्थ बाहर की आरै ले जाना। अन्तः शक्तियों क्षमताओं का बाहर की ओर विकास करना शिक्षा जीवन भर चलती रहती है। यह एक स्वाभाविक सामाजिक, दार्शनिक, राजनैतिक, आर्थिक, वैज्ञानिक तथा मनोवैज्ञानिक प्रक्रिया है जो निरन्तर ज्ञान कौशल में वृद्धि के साथ व्यवहार में परिवर्तन करती रहती है।

शिक्षा के व्यापक अर्थ के अनुसार शिक्षा जीवन पर्यन्त चलने वाली प्रक्रिया है। दूसरे शब्दों में व्यक्ति जीवन से लेकर मृत्यु तक के बीच की जीवन यात्रा में जो कुछ सीखता है तथा अनुभव करता है। वह सब व्यापक अर्थ में शिक्षा हैं। जे. एस. मेकेन्जी ने शिक्षा का व्यापक अर्थ बताते हुए कहा है कि "व्यापक अर्थ में शिक्षा एक ऐसी प्रक्रिया है जो जीवन भर चलती रहती है तथा जीवन के प्रत्येक अनुभव से उसके भंडार मे वृद्धि होती है। शिक्षा को जीवन का साध्य भी कहा जा सकता है।

शिक्षा के लिये प्रयुक्त अँग्रेजी शब्द एजुकेशन (Education) पर विचार करें तो भी उसका यही अर्थ निकलता है। "एजूकेशन" शब्द की उत्पत्ति लेटिन भाषा के तीन शब्दों से मानी गयी है।

एजुकेटम– इसका अर्थ है- शिक्षण की क्रिया

एजुकेयर– शिक्षा देना- ऊपर उठाना, उठाना

एजुसियर– आगे बढ़ना।

सरल शब्दों में कहा जा सकता है कि शिक्षा का अर्थ है- प्रशिक्षण, संवर्द्धन और पथ-प्रदर्शन करने का कार्य। इस प्रकार एजुकेशन का सर्वमान्य अर्थ हुआ बालक की जन्मजात शक्तियों या गुणों को विकसित करके उसका सर्वांगीण विकास करना। इस शिक्षा प्रक्रिया के स्वरूप की व्याख्या करने में मूल भूमिका दार्शनिक, समाजशास्त्रियों, राजनीतिशास्त्रियों, अर्थशास्त्रियों और वैज्ञानिकों ने अदा की है। सभी ने शिक्षा को अपने-अपने दृष्टिकोणों से देखा परखा और परिभाषित किया है।

शिक्षा की परिभाषा

जैन दर्शन के अनुसार:- "शिक्षा वह है जो मोक्ष की प्राप्ति कराए।"

बौद्ध दर्शन के अनुसार:- "शिक्षा वह है जो निर्वाण दिलाए।"

स्वामी विवेकानन्द के अनुसार:- "मनुष्य की आत्मा में ज्ञान का अक्षय भंडार है। उसका उदघाटन करना ही शिक्षा है।"

टेगोर के अनुसार:- "उच्चतम शिक्षा वह है, जो हमे केवल सूचना ही नहीं देती वरन् हमारे जीवन के समस्त पहलुओं को सम तथा सुडोल बनाती है।"

महात्मा गॉधी के अनुसार:- "शिक्षा से मेरा अभिप्राय बालक एवं मनुष्य के शरीर मस्तिष्क एवं आत्मा के सर्वोतम अंश की अभिव्यक्ति है।"

रूसो के अनुसार:- "जीवन ही शिक्षा है।"

फ्राबेल के अनुसार:- "शिक्षा एक प्रक्रिया है, जो की बालक की अन्त: शक्तियों को बाहर प्रकट करती है।"

महात्मॉ गाँधी के अनुसार:- "शिक्षा का अभिप्राय बालक एवं मनुष्य के शरीर, मन तथा आत्मा में निहित सर्वोतम शक्तियों के सर्वागीण प्रकटीकरण से है।"

टी. पी. नन के अनुसार:- "शिक्षा बालक के व्यक्तित्व का पूर्ण विकास है जिसके द्वारा वह यथा शक्ति मानव जीवन को मौलिक योगदान कर सकें।"

पेस्तालॉजी के अनुसार:- "शिक्षा मनुष्य की आन्तरिक शक्तियों का स्वभाविक सर्वागपूर्ण तथा प्रगतिशील विकास है।"

ब्राउन के अनुसार:- "शिक्षा चैतन्य रूप में एक अनियन्त्रित प्रक्रिया है, जिसके द्वारा व्यक्ति के व्यवहार में परिवर्तन लाये जाते है।"

प्रो. हार्नी के अनुसार:- "शिक्षा शारीरिक एवं मानसिक रूप से विकसित सचेतन मानव का अपने बौद्धिक, उद्वेगात्मक तथा इच्छात्मक वातावरण से सर्वोतम अनुकूलन हैं।"

अरस्तू के अनुसार:- "स्वस्थ शरीर में स्वस्थ मस्तिष्क का निमार्ण करना ही शिक्षा है।"

हरबर्ट स्पेन्सर के अनुसार:- "अच्छे नैतिक चरित्र का विकास ही शिक्षा है।"

जेम्स के अनुसार:- "शिक्षा कार्य सम्बधी अर्जित आदतों का सगंठन है, जो व्यक्ति को उसके भौतिक और सामाजिक वातावरण में उचित स्थान देती है।"

ट्रो के अनुसार:- "शिक्षा नियन्त्रित वातावरण में मानव विकास की प्रक्रिया है।"

सुकरात के अनुसार:- "शिक्षा का अर्थ है-प्रत्येक मनुष्य के मस्तिष्क में अदृश्य रूप में विद्यमान संसार के सर्वमान्य विचारों को प्रकाण में लाना।

एडीसन के अनुसारः- “अब शिक्षा मानव मस्तिष्क को प्रभावित करती है तब वह उसके प्रत्येक गुण को पूर्णता को लाकर व्यक्त करती है।”

युनीवर्सल डिक्शनरी ऑफ इंग्लिश लैग्वेजः- “पालना, प्रशिक्षण देना विषय विकास मस्तिष्क का प्रशिक्षण चरित्र तथा शक्तिया ही शिक्षा है। विशेष अथोर्ं में छोटे बच्चों को प्रचलित निर्देश देना ही शिक्षा है। किसी राज्य में प्रचलित निर्देश प्रणाली शिक्षा कहलाती है।”

शिक्षा का व्यापक एवं संकुचित अर्थ

किसी समाज में किसी बच्चे की शिक्षा उसके परिवार, छोटे बड़े विभिन्न सामाजिक समूहों, सामुदायिक केन्द्रों और विभिन्न प्रकार के विद्यालयों में चलने वाली शिक्षा को ही शिक्षा कहते हैं। इस प्रकार शिक्षा शब्द का प्रयोग दो रूपो में होता है- एक व्यापक रूप में और दूसरा संकुचित रूप में।

शिक्षा व्यापक अर्थ में

शिक्षा अपने व्यापक अर्थ में आजीवन चलने वाली प्रक्रिया है। दूसरे शब्दों में व्यक्ति अपने जन्म से मश्त्यु तक जो कुछ सीखता और अनुभव करता है वह सब शिक्षा के व्यापक अर्थ के अन्तर्गत माना जाता है। शिक्षाशास्त्री जब शिक्षा की बात करते हैं तो वे शिक्षा के इसी रूप को अपनी विचार सीमा में रखते हैं। इस सम्बंध में हम विद्वानों के विचारों को नीचे अंकित कर रहे हैं। यथा लाज "बच्चा अपने माता-पिता को और छात्र अपने शिक्षको को शिक्षिता करता है। प्रत्येक बात, हम जो कहते, सोचते या करते हैं हमें किसी प्रकार भी दूसरे व्यक्तियों के द्वारा कहीं, सोची या की गयी बात से कम शिक्षित नहीं करती है। इस व्यापक अर्थ में जीवन शिक्षा है और शिक्षा जीवन है।"

टी0 रेमेमण्ट- "शिक्षा विकास का वह क्रम है, जिससे व्यक्ति अपने को धीरे-धीरे विभिन्न प्रकार से अपने भौतिक, सामाजिक और आध्यात्मिक वातावरण के अनुकूल बना लेता है।

जीवन ही वास्तव में शिक्षित करता है। व्यक्ति अपने व्यवसाय, पारिवारिक जीवन, मित्रता, विवाह, पितृत्व, मनोरंजन, यात्रा आदि के द्वारा शिक्षित किया जाता है।"

शिक्षा संकुचित अर्थ में

शिक्षा के सीमित अर्थ के अनुसार बालक को स्कलू में दी जाने वाली शिक्षा से है। दूसरे शब्दों में बालक को एक निश्चित योजना के अनुसार, एक निश्चित समय और निश्चित विधियों से निश्चित प्रकार का ज्ञान दिया जाता है। यह शिक्षा कुछ विशेष प्रभावों और विशेष विषयों तक ही सीमित रहती है। बालक इस शिक्षा को कुछ ही वर्षों तक प्राप्त कर सकता है इसको प्राप्त करने का मुख्य स्थान विद्यालय होता है। शिक्षा देने वाला शिक्षक कहलाता है।

टी0 रेमण्ट- "संकुचित अर्थ में शिक्षा का प्रयोग बोलचाल की भाषा और कानून में किया जाता है। इस अर्थ में शिक्षा व्यक्ति, आत्म-विकास और वातावरण के सामान्य प्रभावों को अपने में कोई स्थान नहीं है। इसके विपरीत यह केवल उन विशेष प्रभावों को अपने में स्थान देती है, समाज के अधिक आयु के व्यक्ति जानबूझकर और नियोजित रूप में अपने से छोटों पर डालते हैं भले ही ये प्रभाव परिवार, धर्म या राज्य द्वारा डाले जाये।"

शिक्षा का सम्प्रत्यय

शिक्षा का दार्शनिक सम्प्रत्यय

दर्शन का विचार केन्द्र मनुष्य होता है। मानव जीवन के अन्तिम उद्देश्य की प्राप्ति का साधन मार्ग निश्चित करने में दार्शनिकों की रूचि होती है। मानव जीवन के अन्तिम उद्देश्य के सम्बंध में दार्शनिकों के भिन्न मत हैं, अत: इसका प्रभाव उनके द्वारा दी गयी परिभाषाओं में स्पष्ट झलकता है।

जगतगुरू शंकराचार्य की दृष्टि में- स: विद्या या विमुक्तये।

भारतीय मनीणी स्वामी विवेकानन्द के अनुसार- शिक्षा के द्वारा मनुष्य को अपने पूर्णता को भी अनुभूति होनी चाहिए। उनके शब्दों में- "मनुष्य की अन्तर्निहित पूर्णता को अभिव्यक्त करना ही शिक्षा है।"

युगपुरूष महात्मा गॉधी के शब्दों में- "शिक्षा से मेरा अभिप्राय बालक और मनुष्य के शरीर, मन तथा आत्मा के सर्वांगीण एवं सर्वोत्कृष्ट विकास से है।"

यूनानी दार्शनिक प्लेटो- शिक्षा के द्वारा शरीर और आत्मा दोनों क विकाश के महत्व को स्वीकार करते है। उनके अनुसार – "शिक्षा का कार्य मनुष्य के शरीर और आत्मा को वह पूर्णता प्रदान करना है, जिसके कि वे योग्य हैं।"

अरस्तू के अनुसार- "स्वस्थ शरीर में स्वस्थ मन का निर्माण ही शिक्षा है।"

भौतिकवादी चार्वाकों की दृष्टि में- "शिक्षा वह है जो मनुष्य को सुखपूर्वक जीवन व्यतीत करने के योग्य बनाती है।"

हरबर्ट स्पेन्सर के अनुसार- "शिक्षा का अर्थ अन्त: शक्तियों का बाह्य जीवन से समन्वय स्थापित करना है।"

शिक्षा का समाजशास्त्रीय सम्प्रत्यय

समाज शास्त्रियों का विचार केन्द्र समाज होता है और वे शिक्षा को व्यक्ति एवं समाज के विकास का साधन मानते हैं। उन्होनें शिक्षा प्रक्रिया की प्रकृति के विषय में तथ्य उजागर किये-

1. शिक्षा एक समाजिक प्रक्रिया है– समाजशास्त्रियों के अनुसार जब दो या दो से अधिक व्यक्तियों के बीच सामाजिक अन्तः क्रिया होती है तो वे एक दूसरे की भाषा, विचार, आचरण से प्रभावित होते हैं, यही सीखना है और जब कुछ कार्य निश्चित उद्देश्यों को ध्यान में रखकर किया जाता है तो वह शिक्षा कहलाती है। समाजशास्त्रियों ने स्पष्ट किया कि

शिक्षा समाज के उद्देश्यों एंव लक्ष्यों को प्राप्ति का साधन है जैसा समाज होता है वैसी उसकी शिक्षा होती है।

2. शिक्षा एक अनवरत प्रक्रिया है– समाजशास्त्रियों का दूसरा तथ्य यह है कि शिक्षा समाज में सदैव चलती है। जन्म से प्रारम्भ होकर अन्त तक चलती रहती है। शिक्षा पीढ़ी दर पीढ़ी चलती है। निरन्तरता उसका दूसरा लक्षण है।

जे०एस० मेकजी के अनुसार- "शिक्षा एक ऐसी प्रक्रिया है, जो आजीवन चलती रहती है, और जीवन के प्रायः प्रत्येक अनुभव से उसके से भण्डार में वृद्धि होती है।"

प्रो० डमविल के अनुसार- "शिक्षा के व्यापक अर्थ में वे सभी प्रभाव आते हैं जो व्यक्ति को जन्म से लेकर मृत्यु तक प्रभावित करते हैं।"

3. शिक्षा एक द्वि-ध्रुवीय प्रक्रिया है– समाजशास्त्रियों ने स्पष्ट किया है कि शिक्षा की प्रक्रिया में एक पक्ष प्रभावित करता है और दूसरा पक्ष प्रभावित होता है। शिक्षा के दो ध्रुव होते हैं- एक वह जो प्रभावित करता है (शिक्षक) और दूसरा वह जो प्रभावित होता है (शिक्षार्थी)।

जान डी०वी० ने शिक्षा के दो ध्रुव माने है- एक मनोवैज्ञानिक और दूसरा सामाजिक मनोवैज्ञानिक अंग से उनका तात्पर्य सीखने वाले की रूचि, रूझान और शक्ति से है और सामाजिक अंग से उनका तात्पर्य उनके सामाजिक पर्यावरण से है।

4. शिक्षा विकास की प्रक्रिया है– मनुष्य की शिक्षा उसे केवल परिस्थितियों के साथ सामन्जस्य करना ही नहीं सिखाती है वरन उसे सामाजिक परिवर्तन करने और परिवर्तनों को स्वीकारने के लिये तैयार करती है। इस प्रकार शिक्षा के उद्देश्य पाठ्यचर्चा और शिक्षण विधियों आदि में आवश्यकतानुसार परिवर्तन होता रहता है।

डा० सर्वपल्ली राधाकृष्णन ने स्पष्ट कहा है कि- "शिक्षा को मनुष्य और समाज दोनों का निर्माण करना चाहिये। "

5. शिक्षा एक गतिशील प्रक्रिया है– शिक्षा वह माध्यम है जिसके द्वारा मनुष्य अपनी सभ्यता एवं संस्कृति में निरन्तर विकास करता है। इस विकास के लिये उसकी एक पीढ़ी अपने ज्ञान, कला, कौशल को दूसरी पीढ़ी को हस्तान्तरित करती है। इस हस्तान्तरण को प्रत्येक समाज विद्यालयी शिक्षा में समाहित करता है। अगर शिक्षा गतिशील न होती तो हम विकास न कर पाते। पाश्चात्य जगत के प्रसिद्ध समाजशास्त्री ओटवे महोदय ने शिक्षा के स्वरूप एवं कार्य दोनों को समाहित करते हुये स्पष्ट कहा है कि- "शिक्षा की सम्पूर्ण प्रक्रिया व्यष्टियों एवं सामाजिक समूहों के बीच की अन्तः क्रिया है जो व्यष्टियों के विकास के लिये कुछ निश्चित उद्देश्यों से की जाती है। "

टी० रेमण्ट महोदय ने शिक्षा को इस रूप में परिभाषित किया है– "शिक्षा विकास की प्रक्रिया है जिसमें मनुष्य शैशवकाल से प्रौढकाल तक विकास करता है और जिसके द्वारा वह धीरे-धीरे अपने को अनेक प्रकार से अपने प्राकश्तिक सामाजिक और आध्यात्मिक पर्यावरण के अनुकूल बनाता है। "

शिक्षा का आर्थिक सम्प्रत्यय

अर्थशास्त्रियों के विचार समाज के आर्थिक श्रोत और आर्थिक तन्त्र होते है। शिक्षा को वे एक उत्पादक क्रिया के रूप में स्वीकार करते हैं। उनकी दृष्टि में शिक्षा उपभोग की वस्तुओं के साथ उत्पादन की भी कारक होती है। शोध ये परिणाम देते हैं कि शिक्षित मनुष्य की उत्पादन शक्ति और संगठन क्षमता अशिक्षित व्यक्ति की अपेक्षा अधिक होती है। अर्थशास्त्री शिक्षा को एक निवेश के रूप में स्वीकार करते हैं। उनकी दृष्टि से शिक्षा वह आर्थिक निवेश है जिसके द्वारा व्यक्ति में उत्पादन एंव संगठन के कौशलों का विकास किया जाता है और इस प्रकार व्यक्ति, समाज और राष्ट्र की उत्पादन क्षमता बढ़ाई जाती है और उनका आर्थिक विकास होता है।

शिक्षा का मनोवैज्ञानिक सम्प्रत्यय

भारतीय योग मनोविज्ञान का विचार केन्द्र मनुष्य का बाह्य स्वरूप और उसका अन्त: करण दोनो होते हैं। बाह्य स्वरूप में वह उसकी कर्मेन्द्रियों एवं ज्ञानेन्द्रियों का अध्ययन करता है और अन्तःकरण में मन, बुद्धि, अहंकार, चित्त और आत्मा का अध्ययन करता है। उसकी दृष्टि से शिक्षा का अर्थ है मनुष्य की बाह्य इन्द्रियों और अन्त:करण का प्रशिक्षण शिक्षा के द्वारा सर्वप्रथम शरीर मस्तिष्क और चित्त एवं आत्मा का विकास होना चाहिए। इस विषय में जर्मन शिक्षाशास्त्री पेस्टालॉजी का मत है कि यह विकास स्वाभाविक, सम और प्रगतिशील होना चाहिये। उनके शब्दों में "शिक्षा मनुष्य की जन्मजात शक्तियों का स्वाभाविक समरस और प्रगतिशील विकास है। पेस्टालॉजी के शिष्य फ्रोबेल ने शिक्षा को इस रूप में परिभाषित किया है- ‘‘शिक्षा वह प्रक्रिया है, जिसके द्वारा बालक अपनी आन्तरिक शक्तियों को बाहर की ओर प्रकट करता है। "

शिक्षा का वैज्ञानिक सम्प्रत्यय

वैज्ञानिको का विषय क्षेत्र सम्पूर्ण ब्रह्माण्ड एवं समस्त क्रियायें है। वे किसी भी वस्तु अथवा क्रिया को वस्तुनिष्ठ ढंग से देखते हैं। शिक्षा को वै मनुष्य की शक्तियों के बाह्य जीवनानुकूल विकास के साधन रूप में स्वीकार करते है।

हरबर्ट स्पेन्सर के शब्दो में- "शिक्षा का अर्थ अन्तःशक्तियों का बाह्य जीवन से समन्वय स्थापित करना है।"

शिक्षा की प्रक्रिया

एडम द्वारा परिभाषित शिक्षा की प्रक्रिया को इस रूप में प्रदिश्रणत किया जा सकता है शिक्षक शिक्षण प्रक्रिया शिक्षार्थी एडम के अनुसार शिक्षा की प्रक्रिया दो ध्रुवों के बीच चलती है जिसमें शिक्षक का परिपक्व अनुभव, व्यक्तित्व, शिक्षार्थी के अपरिपक्व व्यक्तित्व में वांछित परिवर्तन लाने का कार्य करता है। शिक्षार्थी के विकास की यह प्रक्रिया न केवल संचेतन होती है, अपितु सविमर्श होती है अर्थात् शिक्षक के सम्मुख शिक्षार्थी के विकास की

दिशायें स्पष्ट एवं पूर्व निर्धारित होती है। यह परिवर्तन दो माध् यमों से होता है। प्रथम तो अध्यापक के व्यक्तित्व के प्रत्यक्ष प्रभाव एवं द्वितीय ज्ञान के विविध रूपों द्वारा। कठोपनिणद् में शिक्षण की प्रक्रिया जो इस रूप में व्याख्या की गयी है।

सहनाववतु सहनौभुनक्तु सहवीर्यं करवावहै।

तेजस्विना वधीतमस्तु मां विद्विषावहै।। (शांति मंत्र)

सहनाववतु- साथ-साथ हम एक दूसरे की रक्षा करे अर्थात् शिक्षक शिक्षार्थी दोनो ही एक दूसरे के नैतिक विकास में सहायक होते हैं, तथा सम्भावित पतन से एक दूसरे की रक्षा की जाती है।

सहनौभुनक्तु- साथ-साथ उपभोग करें अथार्त् ज्ञानाजर्न से उपलब्ध सिद्धियों का उपभोग शिक्षक व छात्र मिल-जुलकर करें। अर्थात् ज्ञान की वृद्धि भी साथ-साथ होती है।

सहवीर्यं करवावहै- एक दूसरे के शौर्य की रक्षा करे।

तेजस्विना वधीतमस्तु- अध्ययन के फलस्वरूप तेजस्वी बनें।

मां विद्विषावहै- एक दूसरे की उन्नति से ईर्ष्या न करें।

शिक्षा के अंग

शिक्षा के अंग - शिक्षा प्रक्रिया के मुख्यत: दो अंग होते हैं-

1. एक सीखने वाला और
2. दूसरा सिखाने वाला।

1. शिक्षार्थी

यह शिक्षा प्रक्रिया का सबसे पहला और मुख्यतम अंग होता है। शिक्षार्थी की अनुपस्थिति में शिक्षा की प्रक्रिया चलने का केाई प्रश्न ही नहीं। शिक्षा अपनी रूचि, रूझान

और योग्यता के अनुसार ही सीखता है। सीखने की क्रिया शिक्षार्थी के शारीरिक स्वास्थ्य, मानसिक स्वास्थ्य, उसकी अभिवृद्धि, विकास एवं परिपक्वता और सीखने की इच्छा, पूर्व अनुभव, नैतिक गुणों, चरित्र, बल, उत्साह, थकान एवं उसकी अध्ययनशीलता पर निर्भर करती है।

2. शिक्षक

शिक्षा के व्यापक अर्थ में हम सब एक दूसरे को प्रभावित करते हैं सीखते हैं, इसलिये हम सभी शिक्षार्थी और सभी शिक्षक हैं। परन्तु संकुचित अर्थ में कुछ विशेष व्यक्ति, जो जान बूझकर दूसरों को प्रभावित करते हैं और उनके आचार-विचार में परिवर्तन करते हैं, शिक्षक कहे जाते हैं। शिक्षक के बिना नियोजित शिक्षा की कल्पना आज भी सम्भव नहीं है। शिक्षक बालक के विकास में पथ-प्रदर्शक का कार्य करता है।

शिक्षा के प्रकार

व्यवस्था की दृष्टि से शिक्षा के तीन रूप है–

1. औपचारिक,
2. निरौपचारिक और
3. अनौपचारिक।

1. औपचारिक शिक्षा

वह शिक्षा जो विद्यालयों, महाविद्यालयों और विश्वविद्यालयों में दी जाती है, औपचारिक शिक्षा कही जाती है। इसके उद्देश्य, पाठ्यचर्या और शिक्षण विधियां सभी निश्चित होते हैं। यह योजनाबद्ध हेाती है।

2. अनौपचारिक शिक्षा

वह शिक्षा जिसकी याजेना नहीं बनायी जाती न ही निश्चित उद्देश्य होते हैं, न पाठ्यचर्या और न शिक्षण विधियाँ और जो आकस्मिक रूप से सदैव चलती रहती हैं उसे अनौपचारिक शिक्षा कहते हैं। इस प्रकार की शिक्षा मनुष्य के जीवन भर चलती रहती है। परिवार एवं समुदाय में रहकर हम जो सीखते हैं उसमें से वह सब जो समाज हमें सिखाना चाहता है अनौपचारिक शिक्षा की कोटि में आता है।

3. निरौपचारिक शिक्षा

इस शिक्षा का उद्देश्य, पाठ्यचर्या और शिक्षण विधियां प्राय: निश्चित होते हैं, परन्तु औपचारिक शिक्षा की भांति कठोर नहीं होते। यह शिक्षा लचीली होती है। इसका उद्देश्य प्राय: सामान्य शिक्षा का प्रसार और सतत् शिक्षा की व्यवस्था करना होता है। इस पाठ्यचर्या को सीखने वालों की आवश्यकताओं को ध्यान में रखकर निश्चित की जाती है। समय व स्थान भी सीखने वालों की सुविधा को ध्यान में रखकर निश्चित किया जाता है। यह शिक्षा व्यक्ति की शिक्षा को निरन्तरता प्रदान करने का कार्य करती है। निरौपचारिक शिक्षा के भी अनेक रूप हैं। जैसे प्रौढ़ शिक्षा, खुली शिक्षा, दूर शिक्षा और जीवन पर्यन्त शिक्षा अथवा सतत् शिक्षा।

शिक्षा के कार्य

शिक्षा का कार्य देश और काल के अनुरूप बदलता रहता है, शिक्षा के कार्य है –

1. मनुष्य की जन्मजात शक्तियों का विकास करना।
2. शिक्षा का प्रमुख कार्य सतुंलित व्यक्तित्व का विकास करना भी है।
3. शिक्षा का अति महत्वपूर्ण कार्य चरित्र का निर्माण एवं उसका नैतिक विकास करना है।

4. मानव जीवन में शिक्षा का एक प्रमुख कार्य व्यक्ति को आत्म निर्भर बनाना है। ऐसा व्यक्ति समाज के लिये भी सहायक होता है, जो अपना भार स्वयं उठा लेता है।
5. शिक्षा का प्रमुख कार्य बच्चों को जीवन के लिये तैयार करना है।

शिक्षा की आवश्यकता एवं महत्व

हमारे जीवन के प्रत्येक क्षेत्र में शिक्षा की आवश्यकता है। शिक्षा ही बच्चे की जानवर प्रवृत्ति को मानव प्रवृत्ति में बदलती है।

1. शिक्षा वृद्धि एवं विकास के साथ-साथ परिपक्वता के लिए भी आवश्यक है।
2. शिक्षा उसके जीवन में नैतिक, आध्यात्मिक चरित्र निर्माण तथा उच्च स्तर के मूल्यों के व्यवहार के लिए शिक्षा देती है।
3. शिक्षा तात्कालिक तथा अंतिम दोनों शैक्षिक लक्ष्यों को पूर्ण करने के लिए महत्वपूर्ण है।
4. यह आर्थिक रूप से आत्मसंतुष्ट, आत्मनिर्भर एवं आत्मावलंबी बनाती है।
5. शिक्षा मौलिक आवश्यकता के लक्ष्य को पूर्ण करती है।
6. यह व्यक्तियों में बौद्धिक तथा भावनात्मक शक्तियों का विकास करती है ताकि व्यक्ति जीवन की समस्याओं के सफलतापूर्वक समाधान करने के योग्य हो जाए।
7. शिक्षा व्यक्ति में सामाजिक गुणों जैसे सेवा, सहिष्णुता, सहयोग, सहानुभूति तथा संवैधानिक मूल्यों का विकास करती है।
8. शिक्षा हमें राष्ट्र के लिए प्रेम एवं राष्ट्र के विकास के लिए कार्य करना सिखाती है।

1.1.2 भारत में शिक्षा के स्तर

भारत में सबसे ज्यादा औपचारिक शिक्षा प्रचलित है एवं अधिकांश शिक्षार्थी इसी माध्यम से शिक्षा प्राप्त करते है। वर्तमान में भारत में औपचारिक शिक्षा के तीन स्तर हैं-

1. प्राथमिक शिक्षा
2. माध्यमिक शिक्षा
3. उच्च शिक्षा

प्राथमिक शिक्षा

औपचारिक शिक्षा व्यवस्था के प्रथम स्तर को प्राथमिक शिक्षा कहा जाता है प्राथमिक शब्द का सामान्य अर्थ है प्रारम्भिक। इस प्रकार प्राथमिक शिक्षा का शाब्दिक अर्थ है प्रारम्भिक शिक्षा या मुख्य शिक्षा। प्रारम्भिक शिक्षा इसलिए कि यह बच्चों को प्रारम्भ में दी जाती है और मुख्य शिक्षा इसलिए कि यह आगे की शिक्षा की नींव होती है। यदि नींव मजबूत होती है तो बच्चों की आगे की शिक्षा सुचारु रूप से चलती है। प्राथमिक शिक्षा नर्सरी से लेकर कक्षा 8 तक साधारणतया: 14 वर्ष तक की आयु होने तक चलती है। प्राथमिक शिक्षा को तीन भागों में विभाजित किया गया है।

1. पूर्व प्राथमिक शिक्षा
2. निम्न प्राथमिक शिक्षा
3. उच्च प्राथमिक शिक्षा

माध्यमिक शिक्षा

औपचारिक शिक्षा व्यवस्था के दूसरे स्तर को माध्यमिक शिक्षा कहा जाता है। माध्यमिक शब्द का अर्थ है मध्य की, माध्यमिक शिक्षा प्राथमिक और उच्च शिक्षा के मध्य की शिक्षा है। माध्यमिक शिक्षा प्राथमिक और उच्च शिक्षा के बीच की कड़ी होती है।

माध्यमिक शिक्षा ऐसी शिक्षा है जो कि किशोर बच्चों को शिक्षा प्राप्त करने के बाद दिषा प्रदान करती है एवं माध्यमिक शिक्षा ही उच्च शिक्षा का आधार है। भारत में माध्यमिक शिक्षा कक्षा 9 से 12 तक जो कि 13-14 वर्ष से प्रारम्भ होकर 16-18 वर्ष की आयु होने तक चलती है।

उच्च शिक्षा

उच्च शिक्षा का अर्थ है सामान्य रूप से सबको दी जानेवाली शिक्षा से ऊपर किसी विशेष विषय या विषयों में विशेष, विशद तथा शूक्ष्म शिक्षा। यह शिक्षा के उस स्तर का नाम है जो विश्वविद्यालयों, व्यावसायिक विश्वविद्यालयों, कम्युनिटी महाविद्यालयों, लिबरल आर्ट कालेजों एवं प्रौद्योगिकी संस्थानों आदि के द्वारा दी जाती है। प्राथमिक एवं माध्यमिक के बाद यह शिक्षा का तृतीय स्तर है जो प्राय: ऐच्छिक (non-compulsory) होता है। इसके अन्तर्गत स्नातक, परास्नातक (postgraduate education) एवं व्यावसायिक शिक्षा एवं प्रशिक्षण आदि आते हैं।

1.1.3 भारत में उच्च प्राथमिक शिक्षा का स्वरूप

शिक्षा प्रणाली के सुधार में सरकार की बड़ी भूमिका होनी चाहिए केवल लोक लुभावन नीतियों से ही बात नहीं बनेगी बल्कि उसके लिए सरकार को सशक्त शिक्षा नीति बनानी होगी सबसे महत्वपूर्ण कदम अनियमित शिक्षकों को नियमित करना, शिक्षकों की ट्रेनिंग देना है, चंपारण में शिक्षकों का एक बड़ा तबका पढ़ाई के नियमों से वाकिफ नहीं है और यही कारण है। कि यहां शिक्षा की गुणवत्ता बेहद खराब है हमारी व्यवस्था में शिक्षकों से उम्मीद की जाती है कि वे निर्धारित पाठ्यक्रम में ही पढाए, जबकि वह खुद ही पुराना और पूरी तरह चलन से बाहर हो चुका है, शिक्षकों के लिए क्या महत्वपूर्ण है कि वे नए बदलावो व चलन के बारे में जानकारी रखें और पढ़ाते समय उनका प्रयोग करें।

शिक्षण विषय

उच्च प्राथमिक शिक्षा का स्तर पर शिक्षण विषय निम्नलिखित है–

हिंदी, गणित, विज्ञान, पुस्तक, कला, इंग्लिश, संस्कृत, सामाजिक विषय, कला, संगीत, उर्दू. नैतिक शिक्षा, शारीरिक शिक्षा तथा कंप्यूटर आदि।

शिक्षण संस्थान

उच्च प्राथमिक शिक्षा स्तर पर शिक्षण संस्थान तीन प्रकार के होते हैं जो निम्नलिखित हैं।

- सरकारी स्कूल
- अर्ध सरकारी स्कूल
- निजी शिक्षण संस्थान

1.1.4 पाठ्यक्रम में गणित का स्थान

पाठ्यक्रम वह साधन है जिसके द्वारा शिक्षा तथा जीवन के लक्ष्यों की प्राप्ति की जाती है। दूसरे शब्दों में पाठ्यक्रम वह मार्ग है, जिसके द्वारा विद्यार्थी शिक्षा के लक्ष्य को प्राप्त करता है।

गणित विषय का शिक्षण शूक्ष्म एवं दुरूह है इसलिए इस बात की ओर ध्यान देने की बहुत आवश्यकता है कि अध्यापक विषय की दृढ़ता को आसान बनायें तथा दैनिक जीवन में उसके उपयोग पर प्रकाश डालें।

अमेरिका की गणित परिषद तथा गणित अध्यापकों की राष्ट्रीय परिषद ने सन् 1933 में 'गणित का शिक्षा में स्थान' का अध्ययन करने के लिए तथा 'गणित के पाठ्यक्रम' का निर्माण करने के लिए एक आयोग का गठन किया गया। आयोग का उद्देश्य गणित पाठ्यक्रम में लचीलापन तथा क्रमबद्धता लाना था।

इसी प्रकार माध्यमिक शिक्षा आयोग (1952-53) ने संस्तुति की है कि, "गणित को पूर्व माध्यमिक कक्षाओं तक अनिवार्य विषय के रूप में पढ़ाया जाये। पूर्व माध्यमिक शिक्षा के

स्तर पर कार्यक्रम का विशिष्ट उद्देश्य विद्यार्थियों को मानवीय ज्ञान तथा क्रियाकलापों के मुख्य विभागों से साधारण रूप से परिचित कराना है।"

इंग्लैण्ड में भी कालांतर में स्कूलों तथा विश्वविद्यालयों के गणित के पाठ्यक्रमों में परिवर्तन किये गए हैं। यूरोप के आर्थिक सहयोग संगठन ने सन् 1961 में एक पुस्तक 'न्यू थिन्किंग इन स्कूल मैथमेटिक्स' में प्रकाशित की। इसके पश्चात इंग्लैण्ड में गणित की राष्ट्रीय परिषद ने गणित के पाठ्यक्रम में सुधार हेतु अनेक परिवर्तन किये।

गणित एक ऐसा विषय है जिससे मानव का विकास सम्भव है इसी के आधार पर अन्य विषयों का महत्व है इसके बिना सभी नगण्य है जैसे इतिहास, भूगोल, रसायन विज्ञान, भौतिक विज्ञान आदि।

आधुनिक युग की प्रगति में भी गणित का योगदान है चन्द्रमा तक पहुँचने हेतु वैज्ञानिको ने भी गणितीय गणनाओं का ही सहारा लिया। गणित के विकास के साथ ही नई नई खोजों के विषय में भी पता चला है।

किसी भी विषय का शिक्षा में स्थान इस बात पर निर्भर करता है। कि यह वह विशेष शिक्षा के उद्देश्य को पूरा करने मे कितना सहायक है, प्राचीन काल से एक गणित विशेष के उद्देश्य की पूर्ति करने में सहायक है।

कोठारी कमीशन के अनुसार– राष्ट्रीय शिक्षा आयोग 1964 अध्यक्ष– दौलतसंहि

गणित की सामान्य शिक्षा के अंतर्गत सभी विद्यार्थियों के लिए पहली कक्षा से लेकर दसवीं कक्षा तक एक अनिवार्य विषय बना देना चाहिए।

गणित के अनिवार्यता के तथ्य

1. मानसिक और बौद्धिक विकास करने के लिए।
2. तर्कशक्ति, विचार शक्ति, अनुशासन, आत्मविश्वास पर नियंत्रण करने के लिए।

3. नियमित एवं क्रमबद्ध आदतों का विकास करने के लिए।

4. गणित सभी विज्ञानों का विज्ञान होने के कारण।

प्राचीनकाल से लेकर वर्तमान शिक्षा में गणित का सदैव महत्वपूर्ण स्थान रहा। गणित की उपयोगिता को देखते हुए समय-समय पर उसके पाठ्यक्रम में अनेक परिवर्तन हुए। गणित को अनिवार्य विषय मानते हुए उसे पाठ्यक्रम में विशेष स्थान देने के निम्नलिखित मुख्य कारण हैं–

1. गणित एक यथार्थ विज्ञान है।

2. गणित तार्किक दृष्टिकोण पैदा करता है।

3. गणित का जीवन से घनिष्ट सम्बन्ध है।

4. गणित विज्ञान विषयों की तरह सामाजिक जीवन में उपयोगी है।

5. गणित विज्ञान विषयों की आधारशिला है।

6. गणित एक विशेष प्रकार के सोचने का दृष्टिकोण प्रदान करता है।

7. स्कूल के अन्य विषयों के अध्ययन में सहायक।

8. चरित्र निर्माण एवं नैतिकता के विकास में सहायक।

9. गणित की भाषा का सार्वभौमिक होना।

10. गणित अनुशासन संबंधित गुणों का विकास करता है।

11. गणित मानसिक शक्तियों को विकसित करने का अवसर प्रदान करती है।

अतः गणित अत्यंत प्राचीन और महत्वपूर्ण विद्या है। भारतवर्ष में वैदिक काल से ही इसे सबसे ऊँचा स्थान प्राप्त रहा है। भारतीय विद्वानों को गणितशास्त्र का ज्ञान वेदों से प्राप्त

हुआ। आज विश्व को ऐसे-ऐसे सूत्र हमारे वेदों ने दिए हैं, जिनके लिए विश्व सदैव भारत का ऋणी रहेगा।

वर्तमान समय में गणित शिक्षण विद्यार्थियों के ऊपर अपना गहरा प्रभाव रखती है। पग-पग पर विभिन्न परीक्षाएं उनकी प्रतीक्षा करती हैं। अतः ऐसे में विद्यार्थियों को एक ऐसी गणित शिक्षण पद्धति की आवश्यकता है, जो उनके कठिनाई स्तर को कम कर सके।

1.1.5 गणित शिक्षण का महत्त्व

पुरातन काल से ही सभी प्रकार के ज्ञान-विज्ञान में गणित का स्थान सर्वोपरि रहा है-

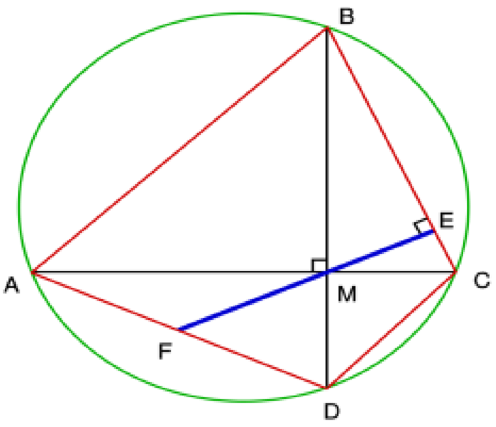
यथा शिखा मयूराणां नागानां मणयो यथा।

तथा वेदांगशास्त्राणां गणितं मूर्ध्नि स्थितम्।। (*वेदांग ज्योतिष*)

(*जिस प्रकार मोरों में शिखा और नागों में मणि का स्थान सबसे उपर है, उसी प्रकार सभी वेदांग और शास्त्रों मे गणित का स्थान सबसे ऊपर है।*)

महान गणितज्ञ गाउस ने कहा था कि गणित सभी विज्ञानों की रानी है। गणित, विज्ञान और प्रौद्योगिकी का एक महत्वपूर्ण उपकरण (टूल) है। भौतिकी, रसायन विज्ञान, खगोल विज्ञान आदि गणित के बिना नहीं समझे जा सकते। ऐतिहासिक रूप से देखा जाय तो वास्तव में गणित की अनेक शाखाओं का विकास ही इसलिये किया गया कि प्राकृतिक विज्ञान में इसकी आवश्यकता आ पड़ी थी।

कुछ हद तक हम सब के सब गणितज्ञ हैं। अपने दैनिक जीवन में रोजाना ही हम गणित का इस्तेमाल करते हैं - उस वक्त जब समय जानने के लिए हम घड़ी देखते हैं, अपने खरीदे गए सामान या खरीदारी के बाद बचने वाली रेजगारी का हिसाब जोड़ते हैं या फिर फुटबाल टेनिस या क्रिकेट खेलते समय बनने वाले स्कोर का लेखा-जोखा रखते हैं।



ब्रह्मगुप्त का प्रमेय, इसके अनुसार $AF = FD$.

व्यवसाय और उद्योगों से जुड़ी लेखा संबंधी संक्रियाएं गणित पर ही आधारित हैं। बीमा (इंश्योरेंस) संबंधी गणनाएं तो अधिकांशतया ब्याज की चक्रवृद्धि दर पर ही निर्भर है। जलयान या विमान का चालक मार्ग के दिशा-निर्धारण के लिए ज्यामिति का प्रयोग करता है। भौगोलिक सर्वेक्षण का तो अधिकांश कार्य ही त्रिकोणमिति पर आधारित होता है। यहां तक कि किसी चित्रकार के आरेखण कार्य में भी गणित मददगार होता है, जैसे कि संदर्भ (पर्सपेक्टिव) में जिसमें कि चित्रकार को त्रिविमीय दुनिया में जिस तरह से इंसान और वस्तुएं असल में दिखाई पड़ते हैं, उन्हीं का तदनुरूप चित्रण वह समतल धरातल पर करता है।

संगीत में स्वरग्राम तथा संनादी (हार्मोनी) और प्रतिबिंदु (काउंटरपाइंट) के सिद्धांत गणित पर ही आश्रित होते हैं। गणित का विज्ञान में इतना महत्व है तथा विज्ञान की इतनी शाखाओं में इसकी उपयोगिता है कि गणितज्ञ एरिक टेम्पल बेल ने इसे 'विज्ञान की साम्राज्ञी और सेविका' की संज्ञा दी है। किसी भौतिकविज्ञानी के लिए अनुमापन तथा गणित का विभिन्न तरीकों का बड़ा महत्व होता है। रसायनविज्ञानी किसी वस्तु की अम्लीयता को सूचित करने वाले पी एच (pH) मान के आकलन के लिए लघुगणक का इस्तेमाल करते हैं। कोणों और क्षेत्रफलों के अनुमापन द्वारा ही खगोलविज्ञानी सूर्य, तारों, चंद्र और ग्रहों आदि की गति की गणना करते हैं। प्राणी-विज्ञान में कुछ जीव-जन्तुओं के वृद्धि-पैटर्नों के विश्लेषण के लिए विमीय विश्लेषण की मदद ली जाती है।

उच्च गतिवाले संगणकों द्वारा गणनाओं को दूसरी विधियों द्वारा की गई गणनाओं की अपेक्षा एक अंश मात्र समय के अंदर ही सम्पन्न किया जा सकता है। इस तरह कम्प्यूटरों के आविष्कार ने उन सभी प्रकार की गणनाओं में क्रांति ला दी है जहां गणित उपयोगी हो सकता है। जैसे-जैसे खगोलीय तथा काल मापन संबंधी गणनाओं की प्रामाणिकता में वृद्धि होती गई, वैसे-वैसे नौसंचालन भी आसान होता गया तथा क्रिस्टोफर कोलम्बस और उसके परवर्ती काल से मानव सुदूरगामी नए प्रदेशों की खोज में घर से निकल पड़ा। साथ ही, आगे के मार्ग का नक्शा भी वह बनाता गया। गणित का उपयोग बेहतर किस्म के समुद्री जहाज, रेल के इंजन, मोटर कारों से लेकर हवाई जहाजों के निर्माण तक में हुआ है। राडार प्रणालियों की अभिकल्पना तथा चांद और ग्रहों आदि तक राकेट यान भेजने में भी गणित से काम लिया गया है।

1.1.6 गणित की शिक्षण विधियाँ

शिक्षक शिक्षार्थी को ज्ञान प्रदान करता है उसे शिक्षण विधिकहते हैं। पर काब अर्थ में होता है। एक और तो इसके एवं योजना की जा की बहुत सी बात कर ली जाती है।

गणित शिक्षण विधियों के प्रकार

1. आगमन विधि (Inductive Method).
2. निगमन विधि (Deductive Method)
3. विश्लेषण विधि (Analytical Method)
4. संश्लेषण विधि (Synthesis Method)
5. प्रयोगशाला विधि (Lab/ Laboratory Method)
6. अनुसंधान विधि (Houristic Method)
7. समस्या समाधान विधि (Problem Solving Method)
8. प्रयोजन विधि (Project Method)
9. व्याख्यान विधि(Lecture Method)
10. विचार-विमर्श विधि (Discussion Method)

1. आगमन विधि (Inductive Method)

इस विधि में प्रत्यक्ष अनुभवों, उदाहरणों तथा प्रयोगों का अध्ययन कर नियम निकाले जाते है तथा ज्ञात तथ्यों के आधार पर उचित सूझ बुझ से निर्णय लिया जाता है। इसमें शिक्षक छात्रों को अध्ययन

(क) प्रत्यक्ष से प्रमाण की ओर,

(ख) स्थूल से सूक्ष्म की ओर, एवं

(ग) विशिष्ट से सामान्य की ओर

करवाते हैं।

आगमन विधि में प्रयुक्त चरण (Steps of Inductive Method)

1. सर्वप्रथम हम एक उदाहरण प्रस्तुत करते हैं (Example)
2. उस उदाहरण का निरीक्षण किया जाता है। (Observation)
3. उस उदाहरण के आधार पर एक नियम बनाया जाता है, जिसे सामान्यीकरण कहा जाता है। (Generalization)
4. उस सामान्य नियम का परीक्षण करके उसका सत्यापन किया जाता है (Testing and verification)

आगमन विधि के गुण

1. एक वैज्ञानिक विधि है, जिससे बालकों में नवीन ज्ञान को खोजने का मौका उपलब्ध कराता है।

2. ज्ञात से अज्ञात की और सरल से जटिल की ओर चलकर बालकों से मूर्त उदाहरणों में सामान्य नियम निकलवाये जाते हैं, जिससे बालकों में जिज्ञासा बनी रही रहती है।

3. स्वयं से अधिगम करने के कारण अधिगम अधिक स्थाई रहता है।

4. बालक स्वयं ही समस्या का निवारण अपने विश्लेषण से प्राप्त करते हैं जिससे उनका अधिगम स्थाई रहता है।

5. व्यवहारिक और जीवन में लाभप्रद विधि है।

आगमन विधि के दोष

1. समय अधिक लगता है।
2. अधिक परिश्रम और सूझ की आवश्यकता रहती है।
3. एक तरह से अपूर्ण विधि है, क्योंकि खोजे गये नियमों या तथ्यों की जांच के लिए निगमन विधि की जरूरत होती है।
4. बालक यदि किसी अशुद्ध नियम की प्राप्ति कर ले तो उसे सत्य को प्राप्त करने में अधिक श्रम व समय की जरूरत होती है।

2. निगमन विधि (Deductive Method)

इस विधि में पहले से स्थापित नियमों व सूत्रों का प्रयोग करके अध्यापक छात्रों को समस्या का समाधान करना सिखाते हैं

1. नियम से उदाहरण की ओर

2. सामान्य से विशिष्ट की ओर

3. सूक्ष्म से स्थूल की ओर एवं

4. प्रमाण से प्रत्यक्ष की ओर चलती है।

निगमन विधि के गुण (Properties of Deductive Method)

1. यह एक सरल और सुविधाजनक विधि है।

2. स्मरणशक्ति के विकास में सहायक है।

3. संक्षिप्त और व्यवहारिक विधि है।

4. बालक तेजी से सीखता है।

निगमन विधि के दोष

1. रटने की शक्ति पर बल देती है।

2. निजी विश्लेषण क्षमता का प्रयोग न करने के कारण मानसिक विकास और कल्पना शक्ति का विकास बाधित होता है।

3. रटा हुआ ज्ञान स्थाई नहीं रह पाता है।

4. छोटी कक्षाओं के लिए सर्वथा अनुपयुक्त विधि

3. विश्लेषण विधि (Analytical Method)

किसी विधान या व्यवस्थाक्रम की सूक्ष्मता से परीक्षण करने की तथा उसके मूल तत्वों को खोजने की क्रिया को 'विश्लेषण' नाम दिया जाता है।

- यह विधि अज्ञात से ज्ञात की ओर चलती है।
- इसका प्रयोग रेखागणित में प्रमेय, निर्मेय आदि को सिद्ध करने में प्रयुक्त होता है।
- जैसे पाइथागोरस का प्रयोग

- कर्ण का वर्ग आधार का वर्ग लम्ब पर बना वर्ग

विश्लेषण विधि के गुण

- यह एक मनोवैज्ञानिक विधि है, जो बालकों में जिज्ञासा उत्पन्न कर उनमें अध्ययन के प्रति रूचि उत्पन्न करती है।
- स्वयं समस्या का समाधान करने हल खोजने पर बल देती है।
- अन्वेषण क्षमता अर्थात खोज करने की क्षमता का विकास होता है।
- स्थाई ज्ञान उत्पन्न होता है।

विश्लेषण विधि के दोष

- अधिक समय लेने वाली विधि है।
- कुशल अध्यापन की जरूरत होती है।
- अधिक तर्क शक्ति, सूझ शक्ति की जरूरत होती है।
- छोटी कक्षा के बालकों के लिए अनुपयोगी मानी जाती है।

4. संश्लेषण विधि (Synthesis Method)

संश्लेषण का अर्थ होता है- अनेक को एक करना, अर्थात इस विधि में कई विधियों का उपयोग करके समस्या का समाधान करने पर बल दिया जाता है।

हिंदी पढ़ाने में पहले वर्णमाला सिखाकर तब शब्दों का ज्ञान कराया जाता है। तत्पश्चात् शब्दों से वाक्य बनवाए जाते हैं।

संश्लेषण विधि के गुण

1. ज्ञात से अज्ञात की ओर ले जाती है, अर्थात ज्ञात नियमों का प्रयोग करके अज्ञात परिणाम की प्राप्ति की जाती है।

उदाहरण- एक वृत्त की त्रिज्या 9 सैमी है, वृत का क्षेत्रफल क्या होगा।

2. सरल और सुविधाजनक विधि मानी जाती है।
3. समस्या का समाधान तीव्रता से संभव है।
4. स्मरणशक्ति के विकास में सहयोग करती है।
5. ज्यादातर गणितीय समस्याओं का समाधान इसी विधि के उपयोग से किया जाता है।

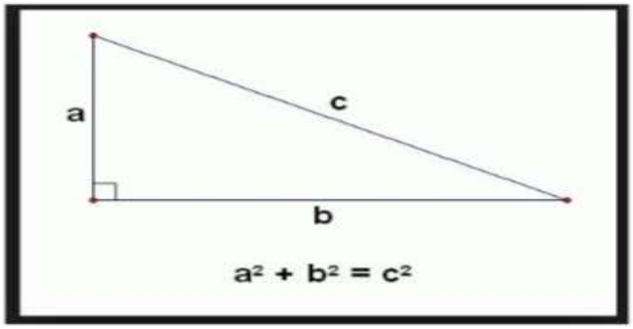
संश्लेषण विधि के दोष

1. रटने की प्रवृति पर जोर देती है, जिससे अन्वेषण क्षमता के विकास का मौका उपलब्ध नहीं होता है।
2. नवीन ज्ञान, तार्किक क्षमता और चिन्तन रहित विधि है, अर्थात इनके विकास में सहयोग नहीं करती है।
3. अर्जित ज्ञान अस्थाई होता है, अर्थात जब तक सूत्र याद है तभी तक समस्या का हल निकाला जा सकता है.
4. छोटे बालकों में चिन्तन शक्ति का ह्रास करती है।

5. प्रयोगशाला विधि (Lab / Laboratory Method)

इस विधि के प्रयोग के लिए हमें एक प्रयोगशाला की जरूरत होती है, जिसमें हम समस्याओं को यात्रिक तरीकों से हल करते हैं।

जैसे-पाइथागोरस प्रमेय को प्रयोगशाला में सिद्ध करना।



प्रयोगशाला विधि के गुण

1. रूचिकर विधि है।
2. स्थाई अधिगम का स्रोत
3. तर्क क्षमता निगमन क्षमता का विकास होता है।
4. रचनात्मकता का विकास होता है।

प्रयोगशाला विधि के दोष

1. खर्चीली विधि है।
2. कम संख्या वाली कक्षा के लिए ही उपयोग में लाई जा सकती है।
3. छोटे उम्र के बच्चों में रूचि उत्पन्न नहीं कर पाती है।

6. अनुसंधान विधि (Heuristic Method) बोधपूर्वक किये गये प्रयत्न से तथ्यों को संकलित करके सूक्ष्मग्राही तथा विवेचक बुद्धि से उसका अवलोकन या विश्लेषण करके नये तथ्य या सिद्धान्तों की खोज करना ही अनुसंधान विधि है।

7. समस्या समाधान विधि (Problem Solving Method)

किसी समस्या का समाधान या हल प्राप्त करने के लिए क्रमबद्ध तरीके से किसी सामान्य विधि या तदर्थ (AD HOC) विधि का प्रयोग करना पड़ता है, समस्या समाधान

अधिगम के अन्तर्गत (Learming by solving problem) के अन्तर्गत जीवन में आने वाली नवीन समस्याओं के तरीकों का हल निकालना संभव होता है।

8. प्रयोजन विधि (Project Method)

इस विधि में किसी भी समस्या के समाधान के लिए छात्र स्वयं किसी भी समस्या का समाधान अपनी स्वाभाविक तर्कशक्ति के द्वारा जानकारी प्राप्त करता है, तथा उससे अपने व्यवहार में परिवर्तन करके समस्या का हल खोजता है।

इस विधि में समस्या का हल खोजने के लिए प्रयोजन पूर्ण कार्य किये जाते है।

9. व्याख्यान विधि (Lecture Method)

यह विधि शिक्षण की सबसे प्रचलित विधि है, इसमें एक कुशल अध्यापक अपने व्याख्यान द्वारा पूरी कक्षा या एक समूह को उनकी समस्या के समाधान की विधि से परिचित कराता है।

10. विचार-विमर्श विधि (Discussion Method)

इस विधि में बालक व अध्यापक अपने तर्कों द्वारा अपनी समस्याओं को एक दूसरे के अनुभव व ज्ञान के आधार पर सुलझाने का प्रयास करते हैं।

1.1.7 गणितः तार्किक अभिक्षमता का आधार

गणित ऐसी विद्याओं का समूह है जो संख्याओं, मात्राओं परिणामों रूपों और उनके आपसी रिश्तों, गुण, स्वभाव इत्यादि का अध्ययन करती हैं। गणित एक अमूर्त या निराकार और निगमनात्मक प्रणाली है। गणित की कई शाखाएं हैं: अंकगणित, रेखागणित, त्रिकोणमिति, संख्यिकी, बीजगणित, कलन, इत्यादि। गणित में अभ्यस्त व्यक्ति या खोज करने वाले वैज्ञानिक को गणितज्ञ कहते हैं।

बीसवीं शताब्दी के प्रख्यात ब्रिटिश गणितज्ञ और दार्शनिक बटेर्ड रसैल के अनुसार "गणित को एक ऐसे विषय के रूप में परिभाषित किया जा सकता है जिसमें हम जानते ही नहीं। नहीं है कि हम क्या कह रहे हैं, ना ही हमें यह पता होता है कि जो हम कह रहे हैं वह सत्य भी है या नहीं।" गणित कुछ अमूर्त धारणाओं एवं नियमों का संकलन मात्र ही नहीं है, बल्कि दैनंदिन जीवन का मूलाधार है।

1.1.8 गणित-अर्थ, परिभाषा और उद्देश्य

गणित का अर्थ

गणित अंक अक्षर तथा चिन्ह आदि संक्षिप्त संकेतों का वह विज्ञान है जिसकी सहायता से परिणाम, दिशा और स्थान आदि का अच्छी तरह बोध हो सकता है दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि "गणित मापने, और तौलने गिनने से संबंधित शब्दों की तालिका है जिसे प्रकृति की क्रियाओं को उचित सूझबूझ द्वारा संकेतों की शब्दावली में परिवर्तित करके समझा जा सकता है। उदाहरण के लिए कोई गणित को गणनाओं का विज्ञान कहता है कोई संख्याओं तथा स्थान विज्ञान के में परिभाषित करता है कोई मापन मात्रा और दिशा (आकार प्रकार) के विज्ञान के रूप में स्पष्ट करता है वास्तव में गणित का शाब्दिक अर्थ होता है वह शास्त्र जिसमें घटनाओं की प्रधानता हो इस प्रकार हम मान्यताओं के आधार पर कह सकते हैं कि गणित अंक अक्षर चिन्ह आदि संक्षिप्त संकेतों का वह विज्ञान है जिसकी सहायता से दिशा परिणाम तथा स्थान का बोध होता है गणित कि मानव जीवन का सच्चा आधार है। गणित ज्ञान के बिना मानव ज्ञान अधूरा है।

मैथमेटिक शब्द ग्रीक (लैटिन भाषा)के मैथेमेटिक से लिया गया है जिसका अर्थ होता है उसी की जाने वाली वस्तुएं गणित में केवल जीवन (दिन प्रतिदिन) के प्रत्येक पहलू पर उपयोग किया जाता है जबकि यह ज्ञान के विभिन्न शाखाओं में प्रयुक्त होता है शिक्षाविद् एरिक टेंपल बैल ने गणित को विज्ञान की रानी एवं नौकर माना है।

गणित ऐसी विद्याओं का समूह है जो संख्याओं, मात्राओं, परिमाणों, रूपों और उनके आपसी रिश्तों, गुण, स्वभाव इत्यादि का अध्ययन करती हैं। गणित एक अमूर्त या निराकार (abstract) और निगमनात्मक प्रणाली है। गणित की कई शाखाएँ हैं : अंकगणित, रेखागणित, त्रिकोणमिति, सांख्यिकी, बीजगणित, कलन, इत्यादि। गणित में अभ्यस्त व्यक्ति या खोज करने वाले वैज्ञानिक को गणितज्ञ कहते हैं।



पुणे में आर्यभट की मूर्ति ४७६-५५०

बीसवीं शताब्दी के प्रख्यात ब्रिटिश गणितज्ञ और दार्शनिक बर्टेंड रसेल के अनुसार ''गणित को एक ऐसे विषय के रूप में परिभाषित किया जा सकता है जिसमें हम जानते ही नहीं कि हम क्या कह रहे हैं, न ही हमें यह पता होता है कि जो हम कह रहे हैं वह सत्य भी है या नहीं।''

गणित कुछ अमूर्त धारणाओं एवं नियमों का संकलन मात्र ही नहीं है, बल्कि दैनिक जीवन का मूलाधार है।

गणित की परिभाषाएँ निम्नलिखित हैं

- आइंस्टाइन के अनुसार– "गणित क्या है? यह उसे मानव चिंतन का प्रतिफल है जो अनुभवों से स्वतंत्र हैं तथा सत्य के अनुरूप है।"
- लॉक के अनुसार– "गणित वह मार्ग है जिसके द्वारा बच्चों के मन या मस्तिष्क में तर्क करने की आदत स्थापित होती है।"
- यंग के अनुसार–" यदि समस्त विज्ञान में से गणित को हटा दिया जाये तो उसकी उपयोगिता शून्य हो जाती है।"
- मार्शल के अनुसार– "गणित ऐसी अमूर्त व्यवस्था का अध्ययन है जो कि अमूर्त तत्वों से मिलकर बनी है इन तत्वों को मूर्त रूप में परिभाषित किया जाता है।"
- गैलिलीयों के अनुसार– "गणित वह भाषा है जिसमें परमेश्वर ने संपूर्ण जगत् या ब्रह्मांड को लिख दिया है।
- वेदांग ज्योतिष के अनुसार– "जिस रूप में मयूरों के सिर पर मुकुट शोभायान होते हैं। तथा सर्पों के सिर पर मणियां वही सर्वोच्च स्थान वेदांग नाम से परिचित विज्ञानों में गणित का है।"

उद्देश्य

गणित शिक्षा के उद्देश्य निम्नलिखित है।

- सामान्य उद्देश्य
- विशिष्ट उद्देश्य

सामान्य उद्देश्य

तर्क मानसिक शक्तियों का विकास अनुशासनात्मक विकास, कलात्मक विकास चारित्रिक विकास, अनुशासनात्मक विकास, कलात्मक विकास, चारित्रिक विकास, समस्या समाधान सोचने का गणितीय करण, आनंद प्राप्ति तथ्य ज्ञान।

- सोचने तथा तर्क करने का विकास करना।
- दैनिक जीवन की गणितीय समस्याओं का समाधान करना।
- पर्यावरण और संस्कृति के साथ परिचित होना और समझना।
- बच्चों के भविष्य के विभिन्न तकनीकी और सामान व्यवसाय के लिए तैयार करना।
- बच्चों को उच्च अध्ययन के लिए तैयार करना।
- बच्चों में खोजी क्षमताओं का विकास करना।

विशिष्ट उद्देश्य

ज्ञानात्मक उद्देश्य बोधात्मक उद्देश्य अभिवृत्तियात्मक अनुप्रयोगयात्मक कौशलयात्मक, गणित शिक्षा के विशिष्ट उद्देश्य कक्षा कक्ष में प्रभावशाली अधिगम पद्धति की योजना बनाने में सही विधि का डिजाइन करने में, पाठ्यक्रम शिक्षण सहायक सामग्री तैयार करने के लिए मार्गदर्शन करने में, मूल्यांकन पद्धति को तैयार करने, आदि में सहायता करते हैं। गणित शिक्षा के विशिष्ट उद्देश्य को सुस्पष्ट सटीक, क्रियान्वनरूप और प्राप्त योग के रूप में लिख कर रखें।

- विषय के मूलभूत अवधारणा पद्धतियां स्पष्ट हो।

- गणित अधिगम के लिए, प्रेम विश्वास और रुचि का सृजन करना।
- गणित विषय में रुचि और आत्मविश्वास का विकास करना।
- सटीकता के लिए प्रोत्साहन देना।
- गणित में कलात्मक दिखाना।
- अन्य विषयों में गणित का उपयोग करना।
- विद्यार्थियों को गणित को वर्तमान तथा भविष्य के जीवन से जोड़ना सिखाना।
- विद्यार्थियों में नियमितता, अभ्यास, धैर्य, स्वालंबन और परिश्रम करने की आदतों का विकास करना।
- गणितीय भाषा और चिन्हों से परिचित कराना।
- उच्च कक्षा के गणित अध्ययन के लिए तैयार करना।
- बच्चों को करती है प्रदर्शनी के लिए तैयार करना।

1.1.9 गणित का इतिहास

हमारे देश में प्रारम्भ से ही गणित को बहुत महत्वपूर्ण विषय माना जाता रहा है। वेदांग ज्योतिष में गणित की महत्ता पर प्रकाश डालते हुए लिखा है–

यथा शिखा मयूराणां, नागानां मणयो यथा।

तद्वद्वेदांग-शात्राणं, गणितं मूर्ध्नि वर्तते।। (वेदांग ज्योतिष)

अर्थात जिस प्रकार मयूरों की शिखाऐं और सर्पों की मणियां शरीर में सर्वोपरि मूर्धा स्थान (मस्तक) पर विराजमान है, उसी प्रकार वेदों के सब अंगों तथा शास्त्रों में गणित शिरोमणि है। ठीक उसी प्रकार जैन गणितज्ञ महावीराचार्य ने गणित के सम्बन्ध में यहाँ तक कहा है-

बहुभिर्विप्रलापैः किम् त्रैलोक्ये सचराचरे।

यत्किंचिद्वस्तु तत्सर्व गणितेन बिना न हि।।

अर्थात् बहुत अधिक प्रयास करने से क्या लाभ है। इस सचराचर जगत में जो कुछ भी वस्तु है वह सब गणित के बिना समझना सम्भव ही नहीं है।

यह तथ्य भारतीय मनीषियों, दार्शनिकों तथा तत्ववेत्ताओं को भली भाँति ज्ञात था, इसी कारण उन्होंने प्रारम्भ से ही गणित के विकास पर विशेष ध्यान दिया। जब अरब एवं यूरोपीय देशों में गणित का ज्ञान नगण्य था तब तक भारत इस क्षेत्र में महान उपलब्धियाँ हासिल कर चुका था। इस सन्दर्भ में यह कहना अतिशयोक्तिपूर्ण न होगा कि बारहवीं शताब्दी तक भारत गणित के क्षेत्र में विश्व का ज्ञान गुरू था।

भारतीय गणित का शुभारम्भ 'ऋग्वेद' से होता है। इसका इतिहास मुख्य रूप से पाँच कालखण्डों' में विभक्त किया जा सकता है।

1. आदिकाल (500 ई.पू. तक)
    a. वैदिक काल (1000 ई.पू. तक)
    b. उत्तर वैदिक काल (1000 ई.पू. से 500 ई.पू. तक)-उत्तर वैदिक काल को दो भागों बांटा गया है।
        i. शुल्व एवं वेदांग ज्योतिष काल
        ii. सूर्य प्रज्ञप्तिकाल
2. पूर्वमध्य काल (500 ई.पू. से 400 ई. तक)

3. मध्यकाल अथवा स्वर्णकाल (400 ई. से 1200 ई. तक)

4. उत्तरमध्य काल (1200 ई. से 1800 ई. तक)

5. वर्तमान काल (1800 ई. के पश्चात)

आदिकाल (500 ई.पू. तक)

आदिकाल भारतीय गणित के इतिहास में अत्यन्त महत्वपूर्ण है। इस काल में अंकगणित, बीजगणित एवं रेखागणित को विधिवत् एवं दृढ़तापूर्वक स्थापित किया जा चुका था।

(क) वैदिक काल (1000 ई.पू. तक)

वेदों में संख्याओं और दाशमिक प्रणाली का स्पष्ट उल्लेख मिलता है। ऋग्वेद की एक ऋचा है-

"द्वादश प्रधयश्य क्रमेकं त्रीणि नभ्यामिक उतच्चिकेत।

तस्मिन्त्सामकं त्रिशता न शंकवोऽर्विता पष्टिर्न चलचलास।"

इसमें द्वादश अर्थात् बारह त्रीणि अर्थात तीन, त्रिशत अर्थात् तीन सौ षष्टि अर्थात् साठ संख्याओं का प्रयोग दाशमिक प्रणाली का स्पष्ट उदाहरण है। इस काल में शून्य तथा ‘दाशमिक स्थान मान’ पद्धति का आविष्कार गणित के क्षेत्र में भारत की अभूतपूर्व देन है। यह ज्ञात नहीं है कि शून्य का आविष्कार क और किसने किया, किन्तु इसका प्रयोग वैदिक काल में होता रहा है। शून्य एवं दाशमिक स्थान मान पद्धति का महत्व इसी से परिलक्षित होता है कि आज यह पद्धति सम्पूर्ण विश्व में प्रचलित है तथा इसी के आविष्कार ने गणित एवं विज्ञान को प्रगति के उन्नत शिखरों तक पहुंचाया है।

दाशमिक स्थानमान पद्धति भारत से अरब गया और अरब से पश्चिमी देशों में पहुंची। यही काल है कि अरब के लोग 1 से 9 तक के अंकों को 'हिन्दसा' कहते हैं और पश्चिमी

देशों में (0. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) को हिन्दू अरबीक न्यूमरल्स (Indo-Arabic Numerals) कहा जाता है।

(ख) उत्तर वैदिक काल (1000 ई.पू. से 500 ई.पू. तक)

i. **शुल्व एवं वेदांग ज्योतिष काल**- शुल्व वह रज्जु (रस्सी) होती थी, जो यज्ञ वेदी बनाने के लिए माप में काम आती थी। शुल्ब सूत्रों में रेखागणित के सूत्रों का विकास एवं विस्तार उपलब्ध है। इनमें तीन सूत्रकारों के नाम विशेष रूप से उल्लेखनीय है बोधायन, आपस्तम्ब और कात्यायना इनके अतिरिक्त मैत्रायण, वाराह, मानव एवं बाधुल इस काल के प्रसिद्ध सूत्रकार हैं। इनकी रचनाऐं इनके शुल्च-सूत्रों के रूप में मिलती हैं। बौधायन शुल्ब सूत्र (1000 ई.पू.) का एक उदाहरण यहाँ प्रस्तुत किया जा रहा है जिसमें उस प्रमेय का उल्लेख है, जिसे आज पाइथागोरस प्रमेय के नाम से जाना जाता है-

"दीर्घचतुरस्यादण्या रज्जुः पाश्र्वमानी तिर्थङ्ञानी च यत्पूयम्भूते कुरू तस्तदुभयं करोति।"

अर्थात् दीर्घचतुरन (आयत) की आक्षण्या रज्जु (कर्ण) पर बना क्षेत्र (वर्ग) पाश्र्वमानी (आधार तथा किनी (लम्ब), पर बने क्षेत्र (वर्ग) के योग के बराबर होता है।

इसी के आगे बौधायन ने दो वर्गों के योग और अन्तर के बराबर वर्ग बनाने की विधि दी है और करणीगत संख्या का मान दशमलव के पाँच स्थानों तक निकालना भी बताया है। बोधावन ने अन्य करणीगत संख्याओं के मान भी दिये हैं। यज्ञों के लिए वेदी में माप के लिए जिस प्रकार रज्जु का प्रयोग किया गया तथा शुल्ब सूत्रों की स्थापना हुई उसी प्रकार यज्ञार्थ समुचित काल निर्णय हेतु इसी काल में ज्योतिष का भी विकास हुआ जिसके कारण शुल्ब काल को वेदांग ज्योतिष काल भी कहा जाता है। ज्योतिष के क्षेत्र में गणित का विस्तरण काल गणना की आवश्यकता को लेकर हुआ। वेदांग ज्योतिष (1000 ई.पू.) के अध्ययन से ज्ञात होता है कि आ समय

ज्योतिषियों को अंकगणितीय मूल संक्रियाओं योग, भाग, गुणा आदि का ज्ञान था यथा-

तिथि मेकादशाम्यस्ता पर्वआशसमन्विताम् ।।

विभज्य भसमूहेन तिथिनक्षत्रमादिशेत।।

अर्थात् तिथि को (11) से गुणा करें, उसमें पर्व के अंश को जोड़ें और फिर नक्षत्र संख्या से भाग दें। इस प्रकार तिथि के नक्षत्र को बतावें।

ii. **सूर्य प्रज्ञप्तिकाल**- जैन साहित्यों में तत्कालीन गणित का विस्तृत विवरण उपलब्ध है। इस काल प्रमुख कृतियाँ सूर्य प्रज्ञप्ति तथा चन्द्र प्रज्ञप्ति (500 ई.पू.) हैं, जो जैन धर्म के प्रसिद्ध ग्रन्थ हैं। सूर्य प्रज्ञप्ति में 'दीर्घवृत्त' का स्पष्ट उल्लेख मिलता है, जिसका अर्थ है 'दीर्घ (आयत) पर बना परिवृत्त' जिसे परिमण्डल के नाम से जाना जाता था। अतः भारतीयों को दीर्घवृत्त का ज्ञान मिनमैक्स (350 ई.पू.) से पूर्व ही हो चुका था। उल्लेखनीय है कि भगवती सूत्र (300 ई. पू.) में भी 'परिमण्डल' शब्द दीर्घवृत्त के लिए प्रयुक्त किया है जिसके दो प्रकार बताये गये हैं-

(1) प्रतरपरिमण्डल (2) पन परिमण्डल

गणित एवं ज्योतिष के विकास में जैनाचार्यों का श्लाघनीय योगदान रहा है। उन्होंने भिन्न तैशाशिक व्यवहार तथा मित्रानुपात, लेखन पद्धति, बीजगणितीय समीकरण, विविध श्रेणिया क्रमचय- संचय, समुच्चय सिद्धान्त, घातांक एवं लघुगणक के नियम आदि विषयों पर प्रकाश डाला है। जॉन नेपियर (1550-1617 ई.) के बहुत पहले लघुगणक का आविष्कार एवं विस्तृत अनुप्रयोग भारत में हो चुका था। बौद्ध साहित्य में भी गणित को पर्याप्त महत्व दिया गया है। इसमें गणित को गणना तथा संख्यान (उच्चगणित) को दो भागों में बाँटा गया है। संख्याओं का वर्णन तीन रूप- संख्येय (ब्बनदर्जइसम) असंख्येय (न्दबबनदर्जइसम) तथा अनन्त (पदपिदपजम) में किया है।

पूर्वमध्य काल (500 ई.पू. से 400 ई. तक)

इस काल में लिखी गयी पुस्तकों बक्षाली गणित, सूर्य सिद्धांत और गणित अनुयोग के कुछ पन्नों को छोड़कर शेष कृतियाँ काल कवलित हो गयी। किन्तु इन पन्नों से और मध्ययुगीन आर्यभट्ट, ब्रह्मगुप्त आदि के उपलब्ध साहित्य से यह निष्कर्ष निकलता है कि इस काल में भी गणित का विकास पर्याप्त रूप से हुआ था। अनुयोगद्वार, स्थानांग सूत्र व भगवतीसूत्र इस युग के प्रमुख ग्रंथ हैं। इनके अतिरिक्त जैनाचार्य के उमास्वाति (135 ई.पू.) की कृति तत्वार्थाधिगम सूत्र भाष्य एवं आचार्य प्रतिवृषम (176 ई. के आसपास) की कृति तितोयपण्णती भी इस काल के प्रसिद्ध जैन ग्रंथ हैं।

मध्यकाल अथवा स्वर्णकाल (400 ई. से 1200 ई. तक)

मध्यकाल को भारतीय गणित का स्वर्ण युग कहा जाता है क्योंकि इस काल में आर्यभट्ट (प्रथम व द्वितीय), ब्रह्मगुप्त, श्रीधराचार्य, भास्कर, महावीराचार्य जैसे अनेक महान एवं श्रेष्ठ गणितज्ञ हुए। वेदों में जो सिद्धान्त, नियम एवं विधियाँ सूत्र रूप में है वे इस युग में जन साधारण के समक्ष आयी।

उत्तरमध्य काल (1200 ई. से 1800 ई. तक)

भास्कराचार्य द्वितीय के पश्चात् गणित के क्षेत्र में मौलिक कार्य अधिक नहीं हो सके। इस काल की प्रमुख देन ‘प्राचीन ग्रन्थों पर टीकाएँ’ है। इस युग में केरल के एक गणितज्ञ नीलकण्ठ ने 1500 ई. में ज्या का मान ज्ञात किया उनके अनुसार इस सूत्र का उल्लेख मलयालम पाण्डलेख मुक्तिभास में भी किया गया है जिसे हम 'ग्रेगरी श्रेणी' के नाम से जानते हैं। इस काल में नारायण पण्डित (1356 ई.), नीलकण्ठ (1587 ई.). कमलाकर (1608 ई.) तथा सम्राट जगन्नाथ (1731 ई.) नामक गणितज्ञों का महत्वपूर्ण योगदान रहा।

वर्तमान काल (1800 ई. के पश्चात)

वर्तमान काल का प्रारम्भ उत्तरमध्यकाल के पश्चात हुआ। इस युग में गणित के क्षेत्र में महत्वपूर्ण अनुसंधान तथा सिद्धान्तों का प्रतिपादन हुआ जिससे गणित को नवीन दिशा प्राप्त हुई। इस युग में श्री रामानुजम का नाम विशेष रूप से उल्लेखनीय है। रामानुजम के अतिरिक्त इस युग में नृसिंह बापू देव शास्त्री (1831 ई.), स्वामी भारती कृष्णतीर्थ जी महाराज (1884-1960 ई.) तथा सुधाकर द्विवेदी के नाम प्रमुख हैं।

19वीं शताब्दी में, गणित की कार्यशैली अमूर्त (Abstract) तथा और अधिक अमूर्त होती गई। कार्ल फ्रेड्रिक गाँस (1777-1855 ई.) ने सम्मिश्र चरों के फलनों, पृष्ठों की ज्यामिति तथा अपरिमित श्रेणियों के कन्वर्जन्स (Convergence) के अध्ययन में क्रांतिकारी तथा असाधारण कार्य किए। उसने बीजगणित की आधारभूत प्रमेय की पहली संतोषजनक उपत्ति प्रदान की।

19वीं शताब्दी में, लोबेचेवस्की तथा बोलबाई ने स्वतंत्रतापूर्वक अलग-अलग यह दर्शाया कि यूक्लिड की ज्यामिति के समांतर अभिगृहित को सत्य मानना आवश्यक नहीं है, जिसके फलस्वरूप दो अयूक्लिडीयन ज्यामितियाँ विकसित हुई, जो अतिपरवतीय (Hyperbolic) और दीर्घवृत्तीय (Elliptical) ज्यामितियाँ कहलाती हैं। इसी शताब्दी में, रीमा ने रीमेनियन ज्यामिति विकसित की जिसमें तीनों प्रकार की ज्यामितियों, अर्थात् यूक्लिडियन, अतिपरवलीय और दीर्घवृत्तीय ज्यामितियों का व्यापकीकरण किया गया है।

गणित शिक्षण की दैनिक जीवन में उपयोगिता

प्राचीन काल से ही शिक्षा में गणित का सदा उचित स्थान रहा है। गणित की उपयोगिता के चारे में बताते हुए जैन गणितज्ञ श्री महावीरचार्य जी ने अपनी पुस्तक 'गणित सार संग्रह' में लिखत है कि लौकिक वैदिक तथा सामाजिक जो-जो व्यापार है उन सब में गणित का उपयोग है कामशास्त्र, अर्थशास्त्र, पाकशास्त्र, गंधर्वशास्त्र, नाट्यशास्त्र, आयुर्वेद, भवन निर्माण आदि विषयों में गणित अत्यंत उपयोगी है।

सूर्य, चंद्र पृथ्वी ग्रह, आदि की गतियों के बारे में जानने के लिए गणित की ही आवश्यकता होती है। दीपों, समुद्रों, पर्वतों,सभा भवन एवम गुम्बदाकार मन्दिरों के परिणाम तथा अन्य बातें करके सहायता से जानी जाती है। मनुष्य के बौद्धिक एवं मानसिक विकास का आधार गणित को ही माना गया है।

मानव जीवन में नित्य ही प्रत्येक व्यक्ति किसी न किसी रूप में आदान प्रदान करता है क्रय-विक्रय तो जीवन का अंग बन गया है। साधारण काल से लेकर महान व्यक्तियों तक यह प्रक्रिया स्वचालित है। यही क्रम जीवन के विभिन्न क्षेत्रों में जारी रहता है इस प्रकार हम कह सकते हैं कि हमारी आधुनिक सभ्यता का आधार गणित ही हैं। विज्ञान की खोजों के पीछे गणित के ही सिद्धांत सर्वोपरि है। बिना गणित के विज्ञान की खोजों में सफलता मिलना नितांत असंभव है। प्रत्येक व्यवहारिक कार्य में जैसे मापना तौलना, गिनना आदि का बोध गणित के ज्ञान के द्वारा ही संभव है, विज्ञान विषयों में ही नहीं बल्कि अन्य देशों में भी गणित की अहम भूमिका होती है। जूता बनाने के नाप, कपड़ा सिलवाने की नाप दवाई देने की खुराक की मात्रा इन सभी कार्यों में गणित के ज्ञान कह सकता पड़ती है। एक अनपढ़ किसान भी गणित के ज्ञान से परिचित है। एक एकड़ खेत में कितना बीज व खाद डाला जाएगा, इस संबंध में उसे ऊपर का भी अनुमान होता है किसी भी क्षेत्र में काम करने वाला व्यक्ति जैसे किसान, मजदूर, व्यापारी, डॉक्टर, वकील, इंजीनियर, शिक्षक पुजारी आदि सभी गणित के अंकों व सिद्धांतों का प्रयोग करता है मजदूर अपनी मजदूरी गिनना जानता है। और रसोईया दाल सब्जी में पढ़ने वाले मसाले, नमक, मिर्च आदि अनुपात गणित द्वारा ही जानता है। व्यापारी लाभ-हानि घाटा बट्टा ब्याज व लाखों रुपए की हेराफेरी बड़ी चतुराई से करता है यह सब गणित के ज्ञान का ही परिणाम है। इस प्रकार प्रत्येक व्यक्ति जीवन में किसी न किसी रूप में गणित का प्रयोग अवश्य रहता है।

आज संसार प्रत्येक वस्तु की उन्नति को मापना चाहता है,पर का बजट बनाते समय, आय और मजदूरी निकालते समय, स्कूल जाते समय थर्मामीटर लगाते समय सभी में गणित के आवश्यकता होती है जीवन का कोई ऐसा नहीं है जिसमें गणित के आवश्यकता ना हो। वेतन का बिल बनाते समय, मकान बनाते समय, नाप-तौल आदि के पूर्ण विज्ञान की

आवश्यकता होती है। बेचारे कुली से लेकर वित्त मंत्री तक जिनका लाखों और करोड़ों रुपए का बजट बनता है उन्हें भी हिसाब रखने के लिए गणित के ज्ञान की आवश्यकता होती है।

गणित की उपयोगिता के सम्बन्ध में यंग महोदय का कथन हैं "लौह, वाष्प और विद्युत के इस युग में जिस ओर भी मुड़कर देखें, गणित ही सर्वोपरि है। यदि रीढ़ की हड्डी निकाल दी जाए तो हमारी भौतिक सभ्यता का ही अंत हो जायेगा।"

उपरोक्त सभी बातों के आधार पर हम कह सकते हैं कि दैनिक जीवन में गणित का ज्ञान परम आवश्यक है। गणित चूल्हा चौका से लेकर अंतरिक्ष तक अपनी उपयोगिता के पैर फैलाये हुए है।

1.1.10 गणित शिक्षण की समस्याएँ

अधिकांश विद्यार्थी गणित विषय में उतने निपुण नहीं होते जितने कि उनसे आशा की जाती है। जिसके मुख्य कारण निम्नलिखित है–

1.1.10.1 प्राथमिक स्तर पर छात्रों की नींव कमजोर होना

प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षण की एक प्रमुख समस्या यह भी है कि छात्रों का प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षण बहुत कमजोर रूप में होता है जिस कारण माध्यमिक स्तर पर छात्र गणित शिक्षण को ठीक से नहीं समझ पाते इसी कारण से गणित शिक्षण के प्रति उनकी रुचि कम हो जाती है।

1.1.10.2 गणित शिक्षा की शिक्षण विधि

शिक्षण विधि का सीधा संबंध अधिगम प्रक्रिया से होता है। सभी छात्र एक विधि से नहीं सीख पाते शिक्षण की विधि जितनी अधिक वैज्ञानिक एवं प्रभावशाली होगी उतनी ही सीखने की प्रक्रिया सरल एवं लाभप्रद होगी बच्चों के लिए खेल विधि करके सीखना निरीक्षण विधि काम योजना विधि, खोज विधि आदि अपना अलग-अलग महत्व है।

लेकिन शिक्षक छात्रों की रुचि के अनुसार उन्हें शिक्षा ना देकर पुरानी विधियों पर निर्भर रहते हैं।

1.1.10.3 शिक्षक का व्यवहार

शिक्षक का व्यवहार छात्रों के सीखने को प्रत्यक्ष रूप से प्रभावित करता है शिक्षक में एक आदर्श शिक्षक के गुण होने चाहिए जैसे सहयोग, मृत भाषा, संयम, शिक्षण कला में निपुणता, आदी तब ही छात्र सहज रूप से सब कुछ सीख सकेंगे लेकिन यदि शिक्षक का व्यवहार अत्यंत कठोर हो तो उसके कक्ष में पढ़ना पसंद नहीं करेंगे।

1.1.10.4 छात्रों का शारीरिक एवं मानसिक स्वास्थ्य

गणित शिक्षण के लिए छात्रों का मानसिक एवं शारीरिक रूप से स्वस्थ होना अत्यंत आवश्यक है। क्योंकि बालक के ध्यान रुचि एकाग्रता पर इसका प्रभाव पड़ता है।

1.1.10.5 गणित शिक्षण का समय व अवधि

यदि छात्र अधिक देर तक इसी क्रिया को करता रहता है वह थकान का अनुभव करने लगता है जो सीखने की प्रक्रिया में बाधा डालती है विद्यालय में समय चक्र बनाते समय गणित जैसे कठिन विषयों को पहले तथा सरल विषयों को बाद में पढ़ने की व्यवस्था बनाई जानी चाहिए। कक्षा के समय अवधि का ध्यान रखना चाहिए।

1.1.10.6 अध्यापक का विषय के प्रति सही ज्ञान ना होना

यदि किसी अध्यापक को अपने विषय की गहन जानकारी नहीं है तो वह छात्रों को बहुत कुछ नहीं दे पाएगा यदि अध्यापक को अपने विषय का पूर्ण ज्ञान होगा तो वह है आत्मविश्वास के साथ छात्रों को नवीन ज्ञान देने में समर्थ होगा।

1.1.10.7 व्यक्तिगत भेदों के ज्ञान की समस्या

प्रत्येक छात्र के बुद्धि रुचि, योग्यता, क्षमता आदि अलग-अलग होती है एक कक्षा में अध्यापक को तीन प्रकार के छात्रों का सामना करना होता है मेधावी सामान्य तथा पिछड़े हुए छात्र अत: शिक्षक को सभी प्रकार के छात्रों की समस्या को समझने वाला तथा हल करने वाला होना चाहिए ज्यादातर शिक्षकों में या गुण नहीं होता है।

1.1.10.8 पाठ्यक्रम के संरचना की समस्या

गणित शिक्षण में पाठ्यक्रम के संरचना का बड़ा महत्व है। पाठ्यक्रम सरल से कठिन की और बाल केंद्रित तथा जीवन से संबंधित होनी चाहिए, क्योंकि माध्यमिक स्तर पर पाठ्यक्रम की संरचना का व्यवस्थित ना होना भी एक समस्या है।

1.1.10.9 गणित शिक्षण के लिए उचित वातावरण का ना होना

विद्यालयों में गणित शिक्षण के लिए उचित वातावरण की समस्या आज गणित शिक्षण प्रमुख समस्या बन गई। गणित शिक्षण के लिए गणित कक्ष, गणित प्रयोगशाला पुस्तकालय कक्षा कक्ष में प्रकाश, आदि बहुत प्रमुख जिसका प्रबंध अधिकांश विद्यालयों में नहीं होता है।

1.1.10.10 आधुनिक शिक्षण विधि की कमी

आजकल के शिक्षक नवीन शिक्षण विधियों का प्रयोग कर रहे हैं आज भी पुरानी शिक्षण विधि का प्रयोग कर रहे हैं। जिससे अधिगम में समस्या होती है विषय की सही जानकारी नहीं दे पाते हैं।

1.1.11 वैदिक गणित

वैदिक गणित, जगद्गुरू स्वामी भारती कृष्ण तीर्थ द्वारा सन् 1965 में विरचित एक पुस्तक है जिसमें अंकगणितीय गणना की वैकल्पिक एवं संक्षिप्त विधियाँ दी गयीं हैं। इसमें

16 मूल सूत्र तथा 13 उपसूत्र दिये गये हैं। वैदिक गणित गणना की ऐसी पद्धति है, जिससे जटिल अंकगणितीय गणनाएं अत्यंत ही सरल, सहज व त्वरित संभव हैं।

1.1.11.1 वैदिक गणित का परिचय

'वैदिक गणित' गणित की प्राचीन प्रणाली पर आधारित है जिसका प्रारम्भ वैदिक युग में हुआ था। यह सामान्य नियमों एवं सिद्धांतों पर आधारित गणना की एक अद्वितीय प्रविधि है, जिसके द्वारा किसी भी प्रकार की गणितीय समस्या को मौखिक रूप से हल किया जा सकता है।

कुछ लोग इस बात का विरोध करते हैं कि वैदिक गणित क्यों कहा जाता है। जिस प्रकार हिंदुओं की आधारशिला वेदों को माना गया है, उसी प्रकार गणित का अस्तित्व भी वेदों में विद्यमान है। वेद आज से 5000 ईसा पूर्व लिपिबद्ध किये गए थे। इन वेदों में हज़ारों वर्ष पूर्व वैदिक गणितज्ञों ने गणित विषय पर अनेक शोध और औपचारिक वार्तालाप का संकलन किया। अब यह स्पष्ट हो चुका है कि इन लेखों में ही बीजगणित, लघुगणक, वर्गमूल, घनमूल, ज्यामितीय गणना की विभिन्न विधियों तथा शून्य की परिकल्पना की नींव रखी गयी।

यह प्रणाली सोलह वैदिक सूत्रों पर आधारित है। ये वास्तव में शब्द सूत्र हैं, जो सभी प्रकार की गणितीय समस्याओं को हल करने की सामान्य विधियों का वर्णन करते हैं। ये सोलह सूत्र संस्कृत भाषा में लिखे गए हैं, जो आसानी से कण्ठस्थ हो जाते हैं और किसी भी बड़ी से बड़ी गणितीय समस्या को शीघ्रता से हल कर देते हैं।

1.1.11.2 वैदिक गणित का इतिहास

वैदिक गणित का प्रारम्भ तो वैदिक काल से हो चुका था परन्तु इसका अस्तित्व 20वीं शताब्दी से माना जाता है। बीसवीं शताब्दी में यूरोपीय देशों में संस्कृत पाठ्य-वस्तुओं के प्रति विशेष रूचि थी। इन पाठ्य वस्तुओं में गणितीय सूत्र विद्यमान थे, जिन्हें नकार दिया गया क्योंकि कोई भी इन सूत्रों में गणित को नहीं खोज सका।

वर्तमान समय में वैदिक गणित का पुनरुज्जीवन किसी चमत्कार से कम नहीं है। इनका अध्ययन न केवल गणितीय प्रमेयों तथा अनुमितियों के लिए है बल्कि ये मानसिक विकास में भी सहायक हैं।

प्राचीन धार्मिक ग्रंथों से वैदिक गणित की पुनर्खोज का श्रेय परम पूज्यनीय श्री भारती कृष्णतीर्थ जी को कहा जाता है। इनका जन्म 1884 ई० में हुआ था। इनके पिता का नाम स्वर्गीय श्री पी० नरसिंघ शास्त्री जो उस समय तित्रिवेली (मद्रास प्रान्त) में तहसीलदार थे। भारती कृष्णतीर्थ जी जो कि पुरी पीठ के शंकराचार्य भी थे उन्होंने प्राचीन पाठ्य पुस्तकों का गहन अध्ययन किया तथा 1958 में वैदिक गणित नामक पुस्तक की रचना की। इस पुस्तक को वैदिक गणित के कार्यों का आरम्भिक बिंदु माना जाता है।

1.1.11.3 वैदिक गणित का विकास

1960 के दशक के अंत में जब वैदिक गणित नामक इस पुस्तक की प्रतिलिपि लंदन पहुंची तब गणित की इस नयी वैकल्पिक प्रणाली की सभी के द्वारा प्रशंसा की गयी। कैनेथ विलियम्स, एण्ड्र्यू निकोलस तथा जेरेमी पिकल्स जैसे ब्रिटिश गणितज्ञों ने भी इस नयी प्रणाली में रूचि दिखाई। इन सभी ने मिलकर भारती कृष्ण जी की इस पुस्तक आरम्भिक सामग्री का विस्तार किया तथा लंदन में इस पर कई व्याख्यान भी दिए गए। 1981 में इन व्याख्यानों को एक पुस्तक के रूप में संकलित किया जिसे 'इंट्राडक्टरी लेक्टर्स ऑन वैदिक मैथमैटिक्स' कहा गया। 1981-87 के मध्य में एण्ड्र्यू निकोलस ने भारत की कई सफल यात्राएँ की जिससे उसे वैदिक गणित में रूचि जाग्रत हुई। उसने अपने देश में इस गणित का प्रसार किया।

ये सूत्र गणित की सभी शाखाओं अंकगणित, बीजगणित, ज्यामिति, ठोस, समतल, त्रिकोणमितीय, शंकु, खगोलिकी, कैलकुलस, अवकलन, समाकलन आदि के प्रत्येक अध्याय और प्रत्येक अध्याय के प्रत्येक भाग में उनका प्रयोग किया गया है। गणित का कोई भी भाग इसके अधिकार क्षेत्र से परे नहीं है। ये सूत्र समझने, कण्ठस्थ करने तथा उपयोग में आसानी से लाये जा सकते हैं।

डॉ० एल० एम० सिंघवी (यूनाइटेड किंगडम में भारत के भूतपूर्व उच्चायुक्त) ने भी इस प्रणाली का उत्साहपूर्वक समर्थन किया है। उनके अनुसार, "सामान्यतः एकल सूत्र ही विशेष कार्यों के एक-दूसरे से भिन्न व विस्तृत मात्रा के समाधान के लिए पर्याप्त होगा तथा संभवतः आज के कंप्यूटर युग में यह किसी भी योजनाबद्ध चिप के समतुल्य है।" वैदिक गणित की प्रशंसा करते हुए क्लाइव मिडिलटन का विचार है की, "ये सूत्र मस्तिष्क के प्राकृतिक रूप से कार्य करने की विधि को समझाते हैं, जिस कारणवश ये सूत्र विद्यार्थी को उत्तर देने की उचित विधि स्पष्ट करने में मददगार साबित होते हैं।"

1.1.11.4 वैदिक गणित के सोलह सूत्र, अर्थ एवं उपयोग

सूत्र -1–**एकाधिकेन पूर्वेण**

अर्थ–पहले से एक ज्यादा।

उपयोग–इस सूत्र का उपयोग दी गयी संख्या से अगली संख्या को प्राप्त करने में किया जाता है।

सूत्र -2–**निखिलम् नवतश्चरमं दशतः**

अर्थ–सभी नौ में से तथा अंतिम दस में से।

उपयोग–इस सूत्र का उपयोग क्रियात्मक आधार से पूरक ज्ञात करने में किया जाता है।

सूत्र-3–**ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्**

अर्थ–सीधे और तिरछे दोनों विधियों से।

उपयोग–इस सूत्र का उपयोग संख्याओं की ऊर्ध्व व तिर्यक गुणा करने में करते हैं।

सूत्र-4–**परावर्त्य योजयेत्**

अर्थ –पक्षान्तर एवं समायोजन।

उपयोग–इस सूत्र का उपयोग क्रियात्मक आधार से पूरक तथा अधिकाय ज्ञात करने में करते हैं।

सूत्र -5–**शून्यं साम्यसमुच्चये**

अर्थ– जब कोई व्यंजक समान है तो वह व्यंजक शून्य है।

उपयोग– इस सूत्र का उपयोग उस संख्या को ज्ञात करने में किया जाता है जो सभी में उभयनिष्ठ हो व शून्य के बराबर होगा। इस सूत्र को निम्न प्रकार से उपयोग किया जा सकता है।

(1) यदि किसी समीकरण में कोई पद उभयनिष्ठ हो और वह पद शून्य के बराबर हो।

(2) यदि एक समीकरण में स्वतंत्र चरों का गुणनफल समान हो तब चर का मान शून्य होता है।

(3) यदि दो भिन्नों के अंश समान हो, तब दोनों हरों का योग शून्य के बराबर होता है।

(4) यदि एक समीकरण में भिन्नों के अंश व हर का योग समान हो तब योग शून्य के बराबर होगा।

(5) यदि दो व्यंजक समान हो तो पहले में से दूसरे व्यंजक को घटाने पर परिणामी शून्य प्राप्त होता है।

सूत्र -6– **आनुरूप्ये शून्यमन्यत्**

अर्थ– यदि एक अनुपात में हो तो दूसरा शून्य होगा।

उपयोग– इस सूत्र का उपयोग एक समीकरण निकाय में एक चर का मान ज्ञात करने में किया जाता है। जिसमें दूसरे चर के गुणांकों का अनुपात अचर पदों के अनुपात के बराबर होता है।

सूत्र -7– **संकलनव्यवकलनाभ्याम्**

अर्थ– जोड़ना व घटाना।

उपयोग– इस सूत्र का उपयोग युगपत समीकरण में चरों का मान ज्ञात करने में करते हैं। इन युगपत समीकरणों में चरों के गुणांक विनिमेय होते हैं।

सूत्र -8– **पूरणापूरणाभ्याम्**

अर्थ– पूर्णता व अपूर्णता से।

उपयोग– इस सूत्र का उपयोग एक समीकरण को पूर्ण वर्ग या पूर्ण घन बनाकर चर का मान ज्ञात करने में किया जाता है।

सूत्र -9– **चलनकलनाभ्याम्**

अर्थ– अवकलन।

उपयोग– इस सूत्र का उपयोग निम्न दो दशाओं में किया जाता है।

(i) द्विघात के मूल ज्ञात करने के लिए।

(ii) 3, 4, 5 की कोटि के व्यंजकों के गुणनखण्ड करने के लिए।

सूत्र -10– **यावदूनम्**

अर्थ– जो भी पूरक हो।

उपयोग–दो अंकीय संख्या का घन ज्ञात करने के लिए किया जाता है यदि संख्या xy हो तो-

x^3 $x^2 y$ xy^2 y^3

$2x^2 y$ $2xy^2$

हासिल का ध्यान रखते हुए इनका योग ज्ञात करते हैं।

सूत्र -11– **व्यष्टिसमष्टिः**

अर्थ– एकाकी एवं समस्त।

उपयोग– इस सूत्र का उपयोग म० स०, ल० स० तथा औसत ज्ञात करने के लिए किया जाता है।

सूत्र -12–**शेषाण्यंकेन चरमेण**

अर्थ– अंतिम अंक से शेषफल।

उपयोग– इस सूत्र का उपयोग किसी भिन्न को दशमलव रूप में व्यक्त करने में किया जाता है।

सूत्र -13– **सोपान्त्यद्वयमन्त्यम्**

अर्थ– अंतिम तथा उससे पहले का दोगुना।

उपयोग– इस सूत्र का उपयोग चर का मान ज्ञात करने में किया जाता है। जो इस प्रकार है –

तथा A, B, C, D समान्तर श्रेणी में है तब D+2C=0 इस समीकरण का एक हल होगा।

सूत्र -14–**एकन्यूनेन पूर्वेण**

अर्थ– पहले से एक कम।

उपयोग– इस सूत्र का उपयोग निम्न दशाओं में किया जाता है–

(i) दी गयी संख्या से एक कम संख्या ज्ञात करने के लिए।

(ii) दो संख्याओं की गुणा के लिए जिनमें से एक संख्या 9 की आवर्ती संख्या है।

(iii) एक भिन्न को दशमलव में निरूपित करने के लिए।

सूत्र-15– **गुणितसमुच्चयः**

अर्थ– योग की गुणा।

उपयोग– इस सूत्र का उपयोग इसके एक व्यंजक के गुणनखण्डों की जाँच करने में किया जाता है।

एक द्विघातीय या घनीय व्यंजक के गुणनखण्ड करने पर प्राप्त व्यंजक के गुणांकों का योग, गुणनखण्डों के गुणांकों के योग के गुणनफल के बराबर होगा।

सूत्र -16– **गुणकसमुच्चयः**

अर्थ– गुणकों का समुच्चय (सभी गुणक)

उपयोग– इस सूत्र का उपयोग निम्न दशाओं में करते हैं -

(i) संख्याओं की गुणा में शून्यों की संख्या ज्ञात करने में।

(ii) दशमलव संख्याओं की गुणा में दशमलव का स्थान ज्ञात करने में।

1.1.11.5 वैदिक गणित के उपसूत्र

1. आनुरूप्येण– अनुरूपता के द्वारा

2. शिष्यते शेषसंज्ञः– बचे हुए को शेष कहते हैं।

3.आद्यमाद्येनान्त्यमन्त्येन– पहले को पहले से, अंतिम को अंतिम से।

4. केवलैः सप्तकं गुण्यात्– 'क', 'व', 'ल' से 7 से गुणा करें।

5.वेष्टनम्– विभाजनीयता परीक्षण की एक विशिष्ट क्रिया का नाम।

6.यावदूनं तावदूनं– जितना कम उतना और कम।

7.यावदूनं तावदूनीकृत्य वर्गं च योजयेत्– जितना कम उतना और कम करके वर्ग की योजना भी करें।

8.अन्त्योर्दशकेअपि– अंतिम अंकों का योग दस।

9.अन्त्ययोरेव– केवल अंतिम द्वारा।

10.समुच्चयगुणित:– सर्व गुणन।

11.लोपनस्थापनाभ्याम्– विलोपन एवं स्थापना द्वारा।

12.विलोकनम्– अवलोकन द्वारा।

13. गुणितसमुच्चय: समुच्चयगुणित:– गुणांकों के समूहों का गुणनफल और गुणनफल के गुणांकों का योग समान होगा।

1.1.11.6 वैदिक गणित की आवश्यकता

1. वर्तमान की कठिन गणित पद्धतियों के कारण विद्यार्थियों के लिए गणित विषय हौवा बना हुआ है। वैदिक गणित के प्रश्न सरल, सहज एवं शीघ्र हल करने की पद्धतियां उनके लिए इस विषय को रोमांचक एवं आनंददायक बना देती हैं।

2. वैदिक गणित पद्धति की स्वाभाविक मानसिक प्रणालियों के नियमित अभ्यास से मस्तिष्क का स्वतः ही सर्वांगीण विकास होने लगता है। यह कंप्यूटर द्वारा प्रश्न हल करने से संभव नहीं है।

3. वैदिक गणित में प्रत्येक गणितीय समस्या को हल करने की अनेक विधियाँ हैं जिनके प्रयोग से विद्यार्थियों में उत्साह, आनंद, विश्वास और अनुसन्धान प्रवृत्ति का जागरण होता है।

4. यह गणित के अध्ययन में क्रांति लाने वाला है तथा शोध एवं विकास के लिए नवीन दृष्टिकोण प्रस्तुत करता है।

5. वैदिक गणित द्वारा उत्तर की जाँच सरल रूप में की जा सकती है।

6. वैदिक गणित द्वारा हर भारतीय के हृदय में अपने देश, धर्म, संस्कृति और इतिहास के प्रति गौरव की भावना पैदा होती है। इससे अपने महान पूर्वजों के प्रति हमारा मस्तक श्रद्धा से नत हो जाता है। यह भावना "शॉर्टकट्स इन मैथ" कहने से नहीं आ सकती है।

7. वैदिक गणित पद्धति ग्रामीण, नगरीय, प्राथमिक, माध्यमिक तथा उच्च शिक्षा प्राप्त के विद्यार्थियों के अनुरूप विशेष रूप से सुखद एवं रोमांचकारी बनाती है। वैदिक गणित की पद्धतियों का अभ्यास करने पर उत्तर जल्दी निकलता है और गलती होने की सम्भावना घट जाती है। कागज कलम की आवश्यकता न्यूनतम होती है और कई बार तो एक पंक्ति में उत्तर लिखना संभव हो जाता है। प्रतियोगी परीक्षाओं में समय के अभाव को देखते हुए वैदिक गणित का प्रयोग अत्यंत लाभदायक है।

1.2 समस्या का प्रादुर्भाव

शैक्षिक क्षेत्र में आज-कल प्रायः यह देखा जाता है कि गणित शिक्षण में अनगिनत कठिनाइयों और समस्याओं का सामना करना पड़ता है। वैदिक गणित केवल गणित ही नहीं है. बल्कि एक सांस्कृतिक धरोहर है। इसे संजो कर रखना हम भारतीयों का पावन कर्तव्य बनता है। इस रचना का मुख्य उद्देश है प्राचीन भारत की बौद्धिक संपदा को प्रकाश में लाना।

वैदिक गणित का दुनिया को ज्ञान नहीं था लेकिन प्राचीन संस्कृत पाठ में रुचि बढ़ाने के साथ 1911 में वैदिक गणित गोस्वामी भारती कृष्ण तीर्थ जी (पुरी के पूर्व शंकराचार्य) द्वारा पुनः खोजा गया। स्वामी भारती कृष्ण तीर्थ जी संस्कृत, गणित, इतिहास और दर्शनशास्त्र के महान विद्वान थे। उनके गहन अध्ययन और सावधानीपूर्वक किए गए अनुसंधान में महान गणित के सूत्रों को संस्कृत सूत्रों के रूप में जाना था।जिन्हें अभी तक पूरी तरह से नजरअंदाज कर दिया गया था क्योंकि कोई भी उन्हें कड़ी से संबंधित नहीं कर सका

था। वैदिक गणित जो भारती कृष्ण तीर्थ जी का एक अग्रणी कार्य है,मे गणित की सूक्ष्म तकनीके हैं। उसे वैदिक गणित की दिशा में पहला काम माना जाता है।

1960 के दशक के उत्तरार्ध में उनकी पुस्तक की एक प्रति लंदन पहुंची और वहां से वैदिक गणित का पुनर्जन्म हुआ। इसे गणित की एक नई वैकल्पिक प्रणाली के रूप में लिया गया ब्रिटिश गणितज्ञों को वैदिक गणित में रूचि थी। इस पर कई व्याख्यान दिए गए जो बाद "वैदिक गणित का परिचयात्मक व्याख्यान नामक पुस्तक में प्रकाशित किए गए। 1981 और 1987 के बीच एंड्रू निकोलस की भारत यात्रा के बाद, वैदिक गणित के प्रति रुचि भारत में विकसित होने लगी तथा इसने वैदिक गणित को एक नया दृष्टिकोण दिया।

वैदिक गणित विश्व की सबसे तेज गति प्रक्रिया है यह सामान्य गणित की तुलना में 10 से 5 गुना तेज हैं। वैदिक गणित में गणना के अनोखे तरीके हैं जो सरल सूत्रों पर आधारित है। अतः इसका उद्देश्य ही है कि समय की बचत कर गणना की जा सके।

स्कूली स्तर पर वैदिक गणित को पढ़ाया जाना अति आवश्यक है। आठवीं कक्षा तक के बच्चों में गणना करने की कला का विकास तेज गति से हो ऐसा वैदिक गणित का उद्देश्य है। वैदिक गणित अनिवार्य रूप से स्कूली स्तर पर शुरू करने का मुख्य उद्देश्य ही है कि प्रत्येक बालक के मस्तिष्क का विकास हो तब वैदिक गणित के उपयोग के माध्यम से वह अपनी त्मिकता को उजागर कर सकें।

वैदिक गणित को प्रचलन में लाने का मुख्य उद्देश हमारी भारतीय संस्कृति को बचाना हमारे देश में कितने महान गणितज्ञ हुए। उनके द्वारा बनाए गए सूत्र आज हम उपयोग में ही नहीं लेते हैं जबकि संपूर्ण गणित इनके द्वारा हल की जा सकती है इसका मुख्य कारण पाश्चात्य संस्कृति का प्रभाव भी है। आधुनिक गणित द्वारा बहुत अधिक समय की बचत नहीं की जा सकती और न ही वह विद्यार्थियों के मानसिक स्तर को ऊंचा उठाने में सहायक है। शून्य दशमलव आदि की खोज भारत में हुई की गई है। अतः वैदिक गणित का उपदेश हमारी भारतीय संस्कृत को फिर से जीवित करने का है।

1.3 अध्ययन की आवश्यकता

हम सभी के जीवन का एक मूल उद्देश्य होता है, सभी की एक आकांक्षाएँ होती है कि जीवन में वो कामयाब हो, एक अच्छी नौकरी हो और वो अपनी जरुरत की सभी चीजों को खरीदे। सबके सपने अलग-अलग तरह के होते है और इन सपनों और अपनी जरूरतों को केवल अध्ययन द्वारा ही प्राप्त किया जा सकता है। केवल अध्ययन ही आपके भविष्य को बेहतर बना सकता है। हम अपने जीवन की सभी इच्छाओं को पूरा करने और जीवन को बेहतर ढंग से जीने के लिए अध्ययन करते है। अध्ययन से ही हम एक बेहतर समाज का निर्माण कर सकते है। इसके द्वारा ही हम एक अच्छे नागरिक के रूप में राष्ट्र को सर्वश्रेष्ठ बना सकते है।

हम सभी का बचपन जिज्ञासाओं से भरा होता है। केवल अध्ययन ही वो माध्यम है जिसके द्वारा हम इन सभी चीजों के बारे में जान सकते है। मान लीजिये की आपके पास कुछ चॉकलेट है तो सबसे पहले आप उसे गिनना चाहेंगे, पर आपने कभी पढ़ाई नहीं की और आप गिनना नहीं जानते है, तो सोचिये यह आपके लिए कितना दुखदायी होगा।

पढ़ाई या अध्ययन हम सभी के लिए बहुत ही महत्वपूर्ण है। अध्ययन से ही हम अपने उद्देश्यों को प्राप्त कर सकते है और हम अपने आसपास की चीजों को जान सकते है।

अध्ययन ही हमारे व्यक्तित्व और एक बेहतर राष्ट्र निर्माण में सहायक सिद्ध होता है, अतएव अध्ययन सभी के लिए महत्वपूर्ण और आवश्यक है।

जीवन में अपने उद्देश्यों को पूरा करने के लिए हमें अध्ययन की आवश्यकता होती है।

1.4 समस्या कथन

प्रस्तुत लघु शोध अध्ययन का समस्या कथन इस प्रकार है–

“वैदिक गणित के व्यावहारिक अनुप्रयोग:एक अध्ययन”

1.5 समस्या में प्रयुक्त पदों की परिभाषा

1.5.1 वैदिक गणित

बेफिक्रे सरल नियम और सिद्धांत पर आधारित गणना की एक प्राचीन एवं अनूठी तकनीक की है। वैदिक गणित द्वारा मौखिक रूप से कोई भी समस्या हल की जा सकती है जैसे अंकगणित, बीजगणित, त्रिकोणमिति, ज्यामिति आदि यह एक प्राचीन तकनीक है जो गुणन, विभाजनशीलता, जटिल संख्या, वर्ग, वर्गमूल, घन, घनमूल, आदि को सरल बनाती है। यहां तक कि आवर्ती दशमलव और सहायक अंशो को वैदिक गणित द्वारा नियंत्रित किया जा सकता है।

1.5.2 व्यावहारिक अनुप्रयोग

Google का एक भाषी हिन्दी शब्दकोश और अर्द्ध-द्विभाषी शब्दकोश Oxford Languages के अनुसार–

व्यावहारिक शब्द का अर्थ–

1. व्यवहार सम्बन्धी
2. व्यवहार में आने योग्य

अनुप्रयोग शब्द का अर्थ–

किसी सिद्धान्त का व्यवहार में प्रयोग।

कार्यात्मक परिभाषा

प्रस्तुत लघुशोध में व्यावहारिक अनुप्रयोग से आशय चयनित वैदिक गणित के सूत्रों का गणित शिक्षण के क्षेत्र में समावेशन से है।

1.5.3 अध्ययन

अध्ययन एक ऐसी प्रक्रिया है जिसमें बहुत से कारक शामिल होते हैं सीखने वाला जिस तरीके से अपने लक्ष्यों की ओर बढ़ते हुए नया ज्ञान आचार और कौशल को समाहित करता है ताकि उसके सीखने के अनुभवों में विस्तार हो सके।

1.6 अध्ययन के उद्देश्य

- गणित विषय के प्रयोगों से सम्बन्धित रुचिकर एवं नवीनतम सामाग्री का अध्ययन करना एवं उन्हें स्वत: करके देखना।
- गणित विषय के चयनित रुचिकर प्रयोगों की व्यावहारिकता का अन्वेषण करना।
- विद्यार्थियों हेतु गणित के रुचिकर प्रयोगों का चयन करना।
- विद्यार्थियों में गणित के नवीन प्रयोगों के प्रति रुचि एवं अभिवृत्ति का अध्ययन करना।
- गणित विषय के प्रयोगों से संबन्धित रुचिकर एवं नवीनतम सामाग्री का अध्ययन करना एवं उन्हें स्वत: करके देखना।
- विद्यार्थियों में 'करके सीखने' के अभिवृत्ति का विकास करना।
- विद्यार्थियों में चयनित प्रयोगों की प्रभावशीलता का अध्ययन करना।
- गणित की पाठ्यपुस्तकों गणित सम्बन्धी रुचिकर प्रयोगों के समावेशन हेतु सुझाव प्रस्तुत करना।
- प्रस्तुत अध्ययन की शैक्षिक उपादेयता चिन्हित करना।

1.7 अध्ययन का परिसीमन

शोध के लिए शोध समस्या का होना आवश्यक है। उस समस्या को अधिक स्पष्ट करने के लिए सीमाओं का निश्चित होना आवश्यक होता है। जिससे लक्ष्य मार्ग प्रशस्त हो

जाए। अत: अनावश्यक विस्तार से बचने के लिए प्रस्तुत शोध कार्य की सीमाओं को भी शोधकर्त्ता द्वारा निम्नवत निर्धारित किया गया है–

- प्रस्तुत शोध अध्ययन में उत्तर प्रदेश बेसिक शिक्षा परिषद की पाठ्यपुस्तकों तक ही सीमित होगा।
- प्रस्तुत शोध अध्ययन में राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद की पाठ्यपुस्तकों तक ही सीमित होगा।

1.8 शोध विधि

प्रस्तुत लघुशोध में अध्ययन की विषयवस्तु के अनुरूप विषय वस्तु विश्लेषण विधि का अध्ययन किया गया है।

विषयवस्तु विश्लेषण विधि

विषयवस्तु विश्लेषण को दस्तावेज विश्लेषण के नाम से भी पुकारा जाता है। इसमें शोधकर्त्ता अध्ययन किये जाने वाली घटना या व्यक्ति के सम्बन्ध में साक्षात्कार प्रेक्षण या प्रश्नावली से प्राप्त विचारों को एकत्रित नहीं करता बल्कि ऐसी घटनाओं या व्यक्तियों द्वारा किये गये संचारों (communication) या उनके व्यवहारों के बारे में एकत्रित किये गये दस्तावेजों का विश्लेषण कर निष्कर्ष पर पहुँचता है। विषयवस्तु विश्लेषण को परिभाषित करते हुए करलिंगर (Kerlinger) ने कहा है विषयवस्तु विश्लेषण चरों को मापने के लिये संचारों का एक क्रमबद्ध, वस्तुनिष्ठ तथा परिभाषात्मक ढंग से विश्लेषण एवं अध्ययन करने की एक विधि हैं।"

हालस्टी (Holsti) के अनुसार विषयवस्तु विश्लेषण सूचनाओं के विशिष्ट गुणों को क्रमबद्ध एवं वस्तुनिष्ठ ढंग से पहचान करते हुये अनुमान लगाने की एक विधि है।" बेरेलसन (Berelson) ने भी विषयवस्तु विश्लेषण को निम्न प्रकार से परिभाषित किया है– "विषयवस्तु विश्लेषण संचारों की विषयवस्तु में सन्निहित वस्तुनिष्ठ व्यवस्थित तथा परिमाणात्मक विवरण देने की एक शोध प्रविधि है।"

उपरोक्त से स्पष्ट है कि विषयवस्तु विश्लेषण–

(1) एक ऐसी प्रविधि है जिसमें संचार में निहित तथ्यों या विशेषताओं को पृथककर उसे अनुसन्धान प्रदत्त के रूप में तैयार किया जाता है।

(ii) यह एक वैज्ञानिक प्रविधि है।

(iii) इसमें व्यक्त एवं अव्यक्त दोनों तरह के विषयवस्तु का विश्लेषण किया जाता है।

विषयवस्तु विश्लेषण के उद्देश्य

विषयवस्तु विश्लेषण में प्रदत्तों के प्राथमिक स्रोतों में पत्र पत्रिकायें, जनरल, आत्मकथा डायरी, किताब, पाठयक्रम न्यायालय के निर्णय, तस्वीर, फिल्म, कार्टून, आदि प्रमुख है। शोधार्थी इन स्रोतों से प्राप्त प्रदत्तों की विश्वसनीयता की परख करता है तब उनका उपयोग करता है। इस तकनीक के कुछ विशेष उद्देश्य होते हैं जो निम्न हैं–

(i) वर्तमान परिस्थितियों एवं प्रचलनों का वर्णन करना तथा उनकी व्याख्या करना।

(ii) लेखक के संप्रत्ययों, विश्वास, चिन्तन एवं उनकी लेखन शैली को जानना।

(iii) किसी घटना या प्रतिफल से सम्बन्धित विभिन्न कारकों को पहचानना एवं उनकी व्याख्या करना।

(iv) ऐसे विभिन्न संकेतों का विश्लेषण करना जिनसे विभिन्न संस्थाओं देशों या अन्य विचार धाराओं का प्रतिनिधित्व होता है।

(v) पाठ्य पुस्तकों या अन्य एक जैसी पुस्तकों की प्रस्तुतीकरण की कठिनाई स्तर की पहचान करना।

(vi) छात्रों के कार्यों में विभिन्न तरह की त्रुटियों को विश्लेषण करना।

(vii) किसी पाठ्य वस्तु की प्रस्तुति में सम्बन्धित प्रचार एवं पूर्वाग्रह का मूल्यांकन करना।

(viii) विभिन्न विषयों या सस्याओं के तुलनात्मक महत्व को जानना।

विषयवस्तु विश्लेषण की प्रक्रिया

विषयवस्तु विश्लेषण की प्रक्रिया को मूलतः तीन भागों में बाँटा जा सकता है–

(1) समष्टि को परिभाषित तथा वर्गीकृत करना

विषयवस्तु विश्लेषण में सर्वप्रथम समष्टि को ठीक प्रकार से परिभाषित किया जाता है तथा उसका उपयुक्त ढंग से वर्गीकरण किया जाता है। शोधकर्ता द्वारा जिस विषयवस्तु का विश्लेषण करना है, उसे स्पष्ट शब्दों में परिभाषित करके उसे पुनः छोटे-छोटे भागों में विभक्त कर दिया जाता है। उदाहरण के लिये कक्षा अनुशासन पर शिक्षक द्वारा दिखलाई गयी सख्ती के अनुशासन पर पड़ने वाले प्रभावों का अध्ययन करने के लिये शोधकर्ता वर्ग अनुशासन को चार महत्वपूर्ण श्रेणियों समय निष्ठा, ध्यान, पाठ बनाना तथा साथियों के साथ होने वाले दुर्व्यवहार में कमी में बॉट सकता है। इससे शोधकर्ता को परिकल्पना बनाना सरल जाता है।

(2) विश्लेषण की इकाई

विषयवस्तु विश्लेषण में एक महत्वपूर्ण कदम इकाई के रूप में विश्लेषण करना होता है। इन इकाइयों का सम्बन्ध सामग्री के संरचनात्मक पक्ष से होता है।

इकाई से तात्पर्य सामग्री का एक विशिष्ट संरचनात्मक अंश या भाग से होता है जिसे एक पद या एकांश समझकर किसी वर्ग के अन्तर्गत स्थान दिया जाता है।

बेरेलसन ने इन इकाईयों को पाँच भागों में बाँटा है

(i) शब्द (Words)

शब्द विश्लेषण की सबसे छोटी इकाई होती है, परन्तु कभी-कभी इससे भी छोटी इकाई अक्षर का भी प्रयोग किया जाता है। उदाहरण के लिये कोई शोधार्थी विद्यार्थियों की बोधशक्ति तथा शब्दों के स्वरूप के बीच के सम्बन्ध को जानना चाहता है तो वह शब्द को

विश्लेषण की इकाई मानकर शब्दों को तीन भागों–आसान, साधारण तथा कठिन में बाँट सकता है। इस प्रकार से वह अपनी सूची के प्रत्येक शब्द को तीन भागों में बाँटकर तथा उन्हें छात्रों को देकर उनकी बो शक्ति का अध्ययन कर सकता है।

(ii) विषय (Theme)

विश्लेषण की दूसरी इकाई विषय है जो प्रायः एक वाक्य या एक प्रस्ताव के रूप में होता है।

(iii) एकांश (Item)

किसी दिये हुये उद्दीपन के प्रति प्रयोज्य द्वारा की गयी सम्पूर्ण अनुक्रिया को ही एकांश कहा जाता है जैसे प्रयोज्य द्वारा किसी चित्र को देखकर एक कहानी लिखना या लघु आत्मकथा या लघु रेडियो कार्यक्रम या लघु दूरदर्शन कार्यक्रम को विश्लेषण के एकांश के रूप में लिया जाता है।

(iv) स्वलक्षण (Character)

स्वलक्षण से तात्पर्य साहित्यिक रचना में किसी व्यक्ति या पात्र से होता है तथा इस इकाई का प्रयोग लघु कहानियों के विश्लेषण में किया जाता है। इसीलिये साहित्यिक शोध के क्षेत्र में स्वलक्षण इकाई का प्रयोग ज्यादा किया जाता है।

(v) दिक्काल मापदण्ड (Space and time measures)

इस इकाई का प्रयोग सामान्यतः मनोविज्ञान या शिक्षा के अनुसन्धानों में नहीं होता। यह ऐसी इकाई होती है जिसमें वस्तु का भौतिक माप किया जाता है। जैसे–दो वस्तुओं के बीच की दूरी को इंच की संख्या से व्यक्त करना, पेज संख्या विचार विमर्श का समय, पैराग्राफ की संख्या आदि। इसका प्रयोग प्राकृतिक विज्ञानों में ज्यादा किया जाता है।

(3) परिमाणन (Quantification)

विषयवस्तु विश्लेषण का तीसरा भाग परिमाणन है परिमाणन से आशय विषयवस्तु विश्लेषण की वस्तुओं को अंक प्रदान करने की प्रक्रिया से होता है। उदाहरण के लिये किसी लेख के विश्लेषण में कहा जाये कि इसमें 4 पेज या 10 पैराग्राफ हे परिमाणन की प्रक्रिया को सामान्यतः तीन प्रकार से किया जाता है। नामित मापन, क्रमिक मापन तथा रेटिंग मापन।

विषयवस्तु विश्लेषण के लाभ

विषयवस्तु विश्लेषण के निम्न लाभ हैं–

(1) इस विधि का कार्यक्षेत्र व्यापक है जिससे इसे विभिन्न तरह की सामग्रियों के अध्ययन में सरलता से प्रयुक्त किया जा सकता है।

(ii) विषयवस्तु विश्लेषण का प्रयोग आश्रित चर पर किसी प्रयोगात्मक हस्तक्षेप के पड़ने वाले प्रभाव के अध्ययन जैसी परिस्थितियों में भी किया जा सकता है।

(iii) विषयवस्तु विश्लेषण का प्रयोग प्रेक्षण की अन्य विधियों से प्राप्त प्रदत्तों की वैधता ज्ञात करने में किया जा सकता है।

(iv) सामाजिक संस्कृति के क्रमिक विकास के अध्ययन में प्रयोग।

(v) विभिन्न संस्कृतियों के तुलनात्मक अध्ययन में प्रयोग।

विषय वस्तु विश्लेषण की सीमायें

उपरोक्त लाभों के बावजूद इसकी कुछ परिसीमायें भी है जो निम्नवत् हैं–

(1) इस विधि से प्राप्त प्रदत्त अधिक विश्वसनीय नही होते तथा निष्कर्षो पर विभिन्न अनुसन्धानकर्त्ताओं में भी सहमति नहीं होती।

(ii) विषयवस्तु विश्लेषण में निष्कर्षो के सामान्यीकरण की समस्या होती है।

(iii) इस विधि में शोधकर्ता का अपना पूर्वाग्रह, विश्वास एवं स्थिराकृति आदि का विश्लेषण करते समय प्रभाव पड़ता है जिससे आत्मनिष्ठता उत्पन्न हो जाती है।

(iv) इस विधि का कार्य क्षेत्र सीमित होता है, क्योंकि जिन व्यक्तियों के लेख, दस्तावेज आदि किसी कारण उपलब्ध नहीं होते तो उनका विषयवस्तु विश्लेषण नहीं किया जा सकता।

(v) इस विधि में सामान्यतः समय एवं श्रम अधिक लगता है।

1.9 अध्ययन का महत्त्व एवं सार्थकता

क्या हम बिना गणित के अपने जीवन में दिन की भी कल्पना कर सकते हैं। यह असंभव है क्योंकि दैनिक जीवन की समस्याओं के हल के लिए भी हमें किसी न किसी रूप में गणित पर ही आश्रित रहना होता है। गणित अपने चारों ओर के वातावरण से हमें संपर्क करने व विश्व के प्रति हमारी समझ को बढ़ाने में महत्वपूर्ण साधन है। गणित किसी प्राकृतिक स्रोत के समान हमारे चारों ओर है जिसे हम आसानी से अनुभव कर सकते हैं। कोई भी व्यक्ति चाहे वह मजदूर, किसान, व्यापारी, ग्रहणी, डॉक्टर, वकील हो वह प्रतिदिन गणित के अंकों और सिद्धांतों का उपयोग करता है। ऑफिस, अखबार, खेल का मैदान हर जगह गणित का अस्तित्व है। प्रत्येक व्यक्ति को अपनी जीविका कमाने के लिए प्रत्यक्ष या अप्रत्यक्ष रूप से गणित की आवश्यकता होती है। हम अपने दैनिक जीवन की कई प्रकार की समस्याओं को गणित के माध्यम से आसानी से हल कर सकते हैं।

वैदिक गणित सीखने के कई लाभ हैं विद्यार्थियों में समस्या हल करने की क्षमता विकसित होती है और यह रचनात्मक बुद्धि के विकास की और भी ले जाता है।

वैदिक गणित के विद्यार्थी ना केवल घटाव जोड़, गुणन की सरल गणना कर सकते हैं बल्कि बीजगणित ज्यामिति और त्रिकोणमिति जैसे बहुत जटिल गणनाएं भी कर सकते हैं। हमारा मस्तिष्क वैदिक गणित के साथ अधिक रचनात्मक ढंग से काम करता है इसलिए

मानसिक तेज भी इसके साथ जुड़ा हुआ है वैदिक गणित बहुत प्रभावी है और साथ ही इसे सीखना आसान है।

गणित समस्या को हल करने के लिए केवल 16 वैदिक सूत्रों का उपयोग किया जाता है सूत्र मूल रूप से शब्द सूत्र हैं जो गणितीय समस्याओं को हल करने के सामान्य तरीके का वर्णन करते हैं।

स्कूलों में पढ़ाए जाने वाले पारंपरिक तरीकों का उपयोग करके गणना बहुत तेजी से नहीं की जा सकती है। यह विद्यार्थियों को विभिन्न तरीकों से एक ही समस्या को हल करना सिखाती है।

इस प्रकार वैदिक गणित की उपयोगिता, सार्थकता एवं विश्वसनीयता अत्यधिक है। वैदिक गणित हमारे भारतीय गणितज्ञ द्वारा दिया जाने वाला एक उपहार है। जिसे हमें और विस्तारित करने की आवश्यकता है।

द्वितीय अध्याय
सम्बन्धित साहित्य का सर्वेक्षण

2.1 प्रस्तावना

सम्बन्धित साहित्य से तात्पर्य अनुसंधान की समस्या से सम्बन्धित इन सभी प्रकार की ज्ञान-कोशों, पत्र-पत्रिकाओं, प्रकाशित तथा अप्रकाशित शोध-प्रबंधों एवं अभिलेखों आदि से है। जिनके अध्ययन से अनुसंधानकर्त्ता को अपनी समस्या के चयन, परिकल्पना के निर्माण, अध्ययन की रूपरेखा तैयार करने एवं कार्य को आगे बढ़ाने में सहायता मिलती है।

वस्तुतः सम्बन्धित साहित्य के अध्ययन के बिना अनुसंधानकर्त्ता का कार्य अंधे के तीर के समान होगा। इसके अभाव में उचित दिशा में एक पग भी आगे नहीं बढ़ सकता। जब तक उसे ज्ञात ना हो कि उस क्षेत्र में कितना कार्य हो चुका है, किस विधि से कार्य किया गया है तथा उसके निष्कर्ष क्या आए हैं, तब तक वह ना तो समस्या का निर्धारण कर सकता है और ना उसकी रूपरेखा तैयार कर कार्य को संपन्न ही कर सकता है। इसके महत्त्व को स्पष्ट करते हुए गुड, बार तथा स्केट्स कहते हैं, "एक कुशल चिकित्सक के लिए यह आवश्यक है कि वह अपने क्षेत्र में हो रही औषधि संबंधी आधुनिकतम खोजों से परचित होता रहे, इसी प्रकार शिक्षा के जिज्ञासु छात्र, अनुसंधान के क्षेत्र में कार्य करने वाले तथा अनुसंधानकर्त्ता के लिए भी उस क्षेत्र से सम्बन्धित सूचनाओं और खोजों से परिचित होना आवश्यक है।"

भारतीय संस्कृति के अवलोकन से विभिन्न शास्त्रों और कलाओं का ज्ञान होता है। इसी विभिन्न शास्त्रों में गणित का विशेष महत्त्व है। प्राच्य विधा विशारदो ने गणित में विश्व के विद्या कोश में अनेक अमूल्य रत्न अर्पित किए हैं। गणना विज्ञान की संचालिका है। विज्ञान की उन्नति मुख्यत: गणित पर निर्भर करती है । गणित के अनेक आचार्य हुए परंतु हरमन केवल ब्राह्मणों को ही बीजगणित का आदि प्रणेता मानता है। शतोत्तर गणना भी भारतीय मस्तिष्क की देन है। उत्तर कालीन विशेषज्ञ कोल, बुक, हिटनी, बेवर, थीबो, कैन्टर, हीथ, आदि हिन्दुओं की कृति में ग्रीस की परछाई देखते हैं जिन्होंने भारतीय गणित पर कुछ

लेख लिखे हैं, प्राच्य विद्वानों में सुनिश्चितता तथा सूक्ष्मता की कमी का दोष लगाते हैं। परंतु अन्वेषकों ने अब भारतीय विद्वानों की विलक्षण बुद्धिमत्ता तथा उन्होंने गणित शास्त्र पर जो शास्त्रीय दक्षता प्राप्त की थी, उसे स्वीकार कर लिया

गणित शास्त्र हमारे भारतवर्ष की उपज है पुरातन शिला लेखों और मोहनजोदड़ो की खुदाई में पाए गए सिक्कों से यह निश्चित हो गया कि यूनान मिश्र आदि देशों से पूर्व भारतीय वासी संख्याओं को अंकों द्वारा लिखते थे। परंतु आधुनिक अंको से यह अंक कुछ भिन्न थे इस विषय को ममुख्य देन जो हिंदुओं ने दी है वह शून्य है।

भारतीय विद्वानों को गणित शास्त्र का ज्ञान वेदों से प्राप्त हुआ। आज विश्व को ऐसे-ऐसे सूत्र व अंक हमारे वेदों ने दिए हैं, जिनके लिए विश्व सदैव भारत का ऋणी रहेगा। गणित प्राचीन काल से ही भारत में प्रचलित है।

दि स्कोप एण्ड डवलपमेण्ट आफ हिन्दू गणित में वी.वी. दत्त लिखते हैं कि उस समय छोटी और बड़ी संख्या गिनने की विधि ज्ञात थी।

वैदिक गणित की प्रशंसा करते हुए क्लाइव मिडिलटन का विचार है की "ये सूत्र मस्तिष्क के प्राकृतिक रूप से कार्य करने की विधि को समझाते हैं जिस कारणवश ये सूत्र विद्यार्थियों को उत्तर देने की उचित विधि स्पष्ट कराने में मददगार साबित होती है।"

1- वर्तमान की कठिन गणित पद्धतियों के कारण छात्र एवं छात्राओं के लिए गणित विषय हौवा बना हुआ है। वैदिक गणित प्रश्न सरल सहज एवं शीघ्र हल करने की पद्धतियां उनके लिए इस विषय को रोमांचक एवं आनन्ददायक बना देती है।
2- वैदिक गणित पद्धति की स्वाभाविक मानसिक प्रणालियों के नियमित अभ्यास से मस्तिष्क का स्वतः ही सर्वांगीण विकास होने लगता है। यह कंप्यूटर द्वारा प्रश्न हल करने से संभव नहीं है।
3- वैदिक गणित में प्रत्येक गणितीय समस्या को हल करने की अनेक विधियाँ है जिनके प्रयोग से विद्यार्थियों में उत्साह, आनंद, विश्वास और अनुसंधान प्रवृत्ति का जागरण होता है।

4- गणित के अध्ययन में क्रांति लाने वाला है तथा शोध एवं विकास के लिए नवीन दृष्टिकोण प्रस्तुत करता है।
5- वैदिक गणित द्वारा उत्तर की जाँच सरल रूप में की जा सकती है।
6- वैदिक गणित द्वारा हर भारतीय के हृदय में अपने देश, धर्म, संस्कृति और इतिहास के गौरव की भावना पैदा होती है। इससे अपने महान पूर्वजों के प्रति हमारा मस्तक श्रद्धा से नत हो जाता है। यह भावना shortcuts in maths कहने से नहीं आ सकती।
7- वैदिक गणित पद्धति ग्रामीण, नगरी, प्राथमिक, माध्यमिक तथा उच्च शिक्षा प्राप्त के विद्यार्थियों के अनुरूप विशेष रूप से सुखद एवं रोमांचकारी बनाती है। वैदिक गणित की पद्धतियों का अभ्यास करने पर उत्तर जल्दी निकलता है और गलती होने की संभावना घट जाती है कागज कलम की आवश्यकता न्यूनतम होती है कई बार तो एक पंक्ति में उत्तर लिखना संभव हो जाता है। प्रतियोगी परीक्षाओं में समय के अभाव को देखते हुए वैदिक गणित का प्रयोग अत्यंत लाभदायक है।

2.2 गणितीय कुशलता से सम्बन्धित शोध अध्ययन

1. **रेणु बाला चौधरी (1990)** ने "नवोदय विद्यालयों में अध्ययनरत छात्रों की शैक्षिक व्यावसायिक पुरुषों एवं मानसिक योग्यता अध्ययन" किया। उन्होंने अपने अध्ययन में यह निष्कर्ष ज्ञात किया कि छात्रों की शैक्षिक रुचियों का प्राथमिक क्रम क्रमशः विज्ञान, मानविकी कला कृषि प्रौद्योगिकी ललित कला गृह विज्ञान तथा वाणिज्य रहा।
2. **अवधेश शर्मा (1993)** ने "नगरी एवं ग्रामीण क्षेत्र में अध्ययनरत बालिकाओं के मानसिक योग्यता एवं व्यावसायिक रुचि का तुलनात्मक अध्ययन" किया। उन्होंने अपने अध्ययन में नगरीय तथा उपनगरीय छात्राओं की मानसिक योग्यता में सार्थक अंतर पाया जबकि व्यवसाय के रूप में सार्थक अंतर नहीं था।
3. **राजुरकर केवल राम (1993)** ने "कक्षा 11 एवं 12 के छात्र-छात्राओं की मानसिक योग्यता एवं व्यवसाय कृषि का अध्ययन" किया। न्यादर्श में कला एवं

विज्ञान संकाय के 200 छात्र छात्राओं को चुना अध्ययन के निष्कर्ष थे कि छात्र-छात्राओं की वाणिज्य संबंधी व्यवसाय की रूचि में कोई अंतर नहीं है। दोनों संकाय के छात्र-छात्राओं की मानसिक योग्यता समान है।

4. **होता, नारायण (1994)** ने "सामाजिक सुधार के क्षेत्र में स्वतंत्र एवं परतंत्र विषयों की गणित की तार्किक योग्यता का प्रभाव विषय पर अध्ययन" विषय पर शोधकार्य किया अपने निष्कर्ष में उन्होंने पाया कि स्वतंत्र विषय की गणितीय तार्किक योग्यता के छात्रों ने अधिक कुशलता दिखाई।
5. **रेड्डी, विश्वनायन एस० और नागारत्ननगा (1994)** ने "विद्यालयी बच्चों में विद्यालयी वातावरण व मानसिक स्वास्थ्य स्तर के बीच संबंध का अध्ययन करना" नामक शीर्षक पर अध्ययन में पाया कि तीन मानसिक स्वास्थ्य सहायक विषयों में सार्थक विभिन्नता पायी गयी, दायित्व व मानसिक स्वास्थ्य के स्तर में सार्थक भिन्नता पायी गयी, उच्च व औसत दर्ज के विद्यालयों के वातावरण में सार्थक विभिन्नता नहीं पायी गयी।
6. **कानवेकेविन (1996)** ने "एक लिंगी बनाम सहशिक्षा के हाईस्कूल की छात्राओं की गणितीय तार्किक क्षमता, शाब्दिक तार्किक क्षमता व आत्मसंप्रत्यय पर विभेदात्मक प्रभाव का अध्ययन" विषय पर शोधकार्य किया अपने निष्कर्ष में इन्होंने पाया कि एक लिंगी विद्यालय व सह शिक्षा विद्यालय की वरिष्ठ छात्राओं के मध्य अंकों में तार्किक क्षमता के आधार पर कोई महत्वपूर्ण भेद नहीं था। गणितीय तार्किक क्षमता में भी खास भेद नहीं पाया गया।
7. **शर्मा, संजय कुमार (2005)** ने "माध्यमिक स्तर के विद्यार्थियों की अध्ययन आदतों, गणितीय अभिक्षमता एव निष्पति में कोचिंग कक्षाओं के प्रभाव का अध्ययन" किया। अतः शोध निष्कर्ष के अनुसार कोचिंग कक्षाओं का छात्रों की अध्ययन आदतों पर प्रभाव पड़ता है। जबकि छात्राओं पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है। कोचिंग कक्षाओं का विद्यार्थियों की गणितीय क्षमता एवं गणितीय निष्पत्ति पर भी प्रभाव नहीं पड़ता है।

8. **शर्मा, बृजेश कुमार (2006**) ने "छात्र-छात्राओं के मध्य आत्मविश्वास उपलब्धि अभिप्रेरणा और गणित में उपलब्धि के मध्य संबंधों का तुलनात्मक अध्ययन" किया। इनके अध्ययन के निष्कर्ष के अनुसार लड़कों के बीच में आत्मविश्वास और उपलब्धि अभिप्रेरणा के बीच में कोई संबंध नहीं पाया गया, जबकि लड़कियों के बीच आत्मविश्वास और अभिप्रेरणा के मध्य सकारात्मक प्रभाव पाया गया। लड़के और लड़कियों में आत्मविश्वास और गणित में उपलब्धि के मध्य महत्वपूर्ण संबंध देखा गया।
9. **डी हाईने (2009)** ने यह अध्ययन स्कूली विद्यार्थियों पर किया गया जो सरकारी, निजी एवं कैथोलिक स्कूलों में अध्यनरत थे। उनमें गणितीय योग्यता पर परीक्षण आरोपित किया गया, जिसमें पाया गया कि लिंगभेद से भी तार्किक योग्यता पर प्रभाव पड़ता है। स्कूलों से संबंधित विद्यार्थियों में गणितीय क्षमता अधिक पाई गई। निजी क्षेत्र वाले विद्यार्थी अधिक योग्य पाए गए जबकि सरकारी, निजी एवं कैथोलिक स्कूल में अध्ययन करने वाले वास्तविक अमेरिकी विद्यार्थी सामाजिक आर्थिक क्षेत्रों से बाहर से आए हुए विद्यार्थियों के मुकाबले अधिक मजबूत पाए गए।
10. **वर्मा, रचना (2009)** ने "माध्यमिक विद्यालयों के छात्रों की गणित विषय में उपलब्धि, बुद्धि एवं रुचि की मध्य सहसंबंध का अध्ययन" शीर्षक पर शोधकार्य किया तथा उन्होंने उन्होंने निष्कर्ष में पाया कि गणितीय उपलब्धि तथा बुद्धि एवं गणितीय उपलब्धि तथा रुचि के मध्य धनात्मक सार्थक सहसंबंध है। लिंग, आयु तथा माता का शैक्षिक स्तर छात्रों की गणितीय उपलब्धि को प्रभावित करता है जबकि पिता का शैक्षिक स्तर तथा ट्यूशन का गणितीय उपलब्धि पर प्रभाव नहीं पाया गया।
11. **कुमार, हरीश (2010)** ने "माध्यमिक स्तर की एजुसैट से गणित विषय पढ़ने वाले व नहीं पढ़ने वाले विद्यार्थियों की गणितीय अभिक्षमता, तार्किक अभिक्षमता एवं गणितीय निष्पत्ति का अध्ययन विषय पर एम. फिल. शोधकार्य करके निष्कर्ष रूप में पाया कि एजुसैट से पढ़ने वाले और नहीं पढ़ने वाले

विद्यार्थियों की गणितीय अभिक्षमता सामान्य स्तर की पाई गई तथा एजुसैट से पढ़ने वाले विद्यार्थियों की गणितीय अभिक्षमता में कोई अंतर नहीं है, अतः परिकल्पना स्वीकृत होती है। एजुसैट से पढ़ने वाले और नहीं पढ़ने वाले विद्यार्थियों की तार्किक क्षमता निम्न स्तर की पाई गई है, अतः उक्त परिकल्पना अस्वीकृत होती है। एजुसैट से पढ़ने वाले व नहीं पढ़ने वाले छात्रों की क्षमता में अंतर है अतः परिकल्पना अस्वीकृत होती है।

12. **चौधरी, दिलीप कुमार (2011)** ने “उच्च प्राथमिक स्तर के शारीरिक रूप से विकलांग एवं सामान्य विद्यार्थियों के आत्मविश्वास मानसिक स्वास्थ्य एवं तार्किक योग्यता का अध्ययन” शीर्षक पर शोधकार्य किया। इन्होंने अपने अध्ययन में पाया की उच्च प्राथमिक स्तर के शारीरिक रूप से विकलांग एवं सामान्य विद्यार्थियों में आत्मविश्वास मध्यम स्तर का है। उच्च प्राथमिक स्तर के शारीरिक रूप से विकलांग एवं सामान्य विद्यार्थियों के मानसिक स्वास्थ्य में कोई सार्थक अंतर नहीं है। उच्च प्राथमिक स्तर के शारीरिक रूप से विकलांग एवं सामान्य विद्यार्थियों की तार्किक योग्यता में कोई सार्थक अंतर नहीं है।

2.3 वैदिक गणित से सम्बन्धित शोध अध्ययन

वैदिक गणित की उपयोगिता को देखते हुए समय-समय पर अनेक शोध तथा अध्ययन हुए। मैकाले की शिक्षा पद्धति को भारत में लागू होने से पूर्व भारतीय पाठशाला में गणित शिक्षा वैदिक गणित पढ़ाई जाती थी यह बात अलग है कि "ये विधियाँ वैदिक काल से ही विकसित होती रही हैं।"

1. सर्वप्रथम वैदिक गणित पुनर्खोजका का श्रेय पुरी के शंकराचार्य स्वामी भारती कृष्ण तीर्थ जी को जाता है, जिन्होंने प्राचीन पाठ्य पुस्तकों का अध्ययन कर 1958 में वैदिक गणित नामक ग्रंथ की रचना की जिसमें उन्होंने गणित के 16 सूत्री सिद्धांतों की व्याख्या की, जो 1965 में छपी।

2. प्रो०जी०पी० हाल्स्टैड ने अपनी पुस्तक गणित की नींव तथा प्रतिक्रियाएं' के पृष्ठ संख्या-20 पर कहते हैं कि शून्य की महत्ता का बखान नहीं किया जा सकता और यह केवल भारतीय गणितज्ञों की देन है।
3. वैदिक गणित के क्षेत्र में T.G. Unkaltear,S Seshachata Rao ने 1997 में introduction of vedic mathamatics नामक पुस्तक की रचना की।
4. Dr.T.G. Pandaey ने वैदिक गणित पर कार्य करते हुए 'Jagat Guru Shankracharya, Shri Bharti Krishna Teeratha' के नाम से पुस्तक का अनावरण किया जिसमें उन्होंनें उनके सोलह सूत्री सिद्धान्तों की व्याख्या की।
5. 1960 में जब वैदिक गणित नामक पुस्तक के प्रतिलिपि लंदन पहुंची तब गणित की इस नई वैकल्पिक प्रणाली की प्रशंसा की गई। इसके सूत्रों से प्रभावित होकर ब्रिटिश गणितज्ञों जैसे कैनेथ, विलियम्स, एंड्रयू, निकोलस तथा जेरेमी पिकल्स अनेक विद्यालयों में इसकी शिक्षा प्रारंभ और शोध कार्य करते हुए 1982 में Introduction Lectures on Vedic Mathematics नामक पुस्तक का अनावरण किया।
6. भारत में 1988 में महर्षि महेश योगी ने 1 से 14 वर्ष की आयु के बच्चों के ऊपर वैदिक गणित का अध्ययन किया।
7. Vedic Mathematics for schools Book 1' के नाम से J.T.Glover ने सन् 1995 में 8 वर्ष की आयु के बच्चों पर वैदिक गणित का अध्ययन किया जिसके अन्तर्गत बच्चों को जोड़ना, घटाना, गुणा, भाग, दशमलव, भिन्न आदि पर अध्ययन किया।
8. 'The Vedic Geometry Concepts मे Dr kapooe ने ज्यामिति से सम्बन्धित अनेक क्षेत्रों में अध्ययन किया।
9. 1995 में विद्या भारती ने अपने विद्यालयों में वैदिक गणित को पाठ्यक्रम में सम्मिलित किया।
10. **SAHAYA JIJI (2012)** “A study of effectivenes of teaching Vedic mathematics on students' achievement” शीर्षक पर शोधकार्य किया। शोध

कार्य में प्रयोगात्मक अनुसंधान विधि का प्रयोग किया। कुल न्यादर्श की संख्या 130 थी। जिसको दो समूहो में विभाजित किया गया था प्रयोगात्मक समूह और नियंत्रित समूह प्रत्येक समूह में 65 विद्यार्थी थे। शोधकर्ता में कक्षा 7 के अंग्रेजी माध्यम के विद्यार्थियो को लिया गया था। इस शोध में न्यादर्श का चयन यादृच्छिक न्यादर्श विधि द्वारा किया गया था। विद्यार्थियो का पूर्व परीक्षण और पश्च परीक्षण लेने के बाद उन्होने यह निष्कर्ष ज्ञात किया कि वैदिक गणित शिक्षण का छात्रों की गणितीय उपलब्धि पर प्रभाव पडा।

11. **SHRIMALI, TEJASH R. (2013)** "A study of effectivess of Vedik maths on 'expansion' unit of maths subject of std.8" शीर्षक पर शोधकर्ता किया। इन्होनें यह निष्कर्ष पाया कि वैदिक गणित द्वारा गणित विषय को रोचक बनाया जा सकता हैं। वैदिक तरीके से पढाए जाने पर विस्तार इकाई को समय तक याद रखा जा सकता हैं तथा गणित विषय की एक्शपेंशन यूनिट पर वैदिक गणित का प्रभाव पडा।
12. **DHOSHI, MITHESH J. (2014)** ने "Effect of Vedik mathematical skills at class VII" शीर्षक पर शोधकार्य किया। उन्होने यह यह निष्कर्ष ज्ञात किया कि छात्रों को दिलचस्प ढग से गणित सीखने के लिए प्रेरित किया जा सक्ता हैं तथा वैदिक गणितीय कौशल का प्रभाव विद्यार्थियों पर पडता हैं।
13. **VASANT V. SHASTRI (2019)** ने "Evaluation of yoga pranayam and vedik maths in this management of math anxiety and cognitive skills in school children" शीर्षक पर शोध कार्य किया। इन्होने अपने निष्कर्ष में ज्ञात किया कि स्कूली बच्चों में गणित चिंता प्रबंध और संज्ञानात्मक कौशल का योग , प्राणायाम और वैदिक गणित तरीकें से मूल्यांकन करने पर सार्थक अंतर नही पाया।
14. **SANT RAM (2021)** ने "वैदिक गणित के व्याव्हारिक अनुप्रयोंग :एक अध्ययन " शीर्षक पर शोध कार्य किया। इन्होनें यह निष्कर्ष पाया कि वैदिक गणित द्वारा गणित विषय को रोचक बनाया जा सकता हैं। वैदिक तरीके से पढाए जाने पर विस्तार इकाई को समय तक याद रखा जा सकता हैं तथा गणित विषय की एक्शपेंशन यूनिट पर वैदिक गणित का प्रभाव पडा।

2.4 समीक्षात्मक निष्कर्ष

ज्ञान की पुनरावलोकन व अध्ययन नए ज्ञान सदैव पथ प्रदर्शन करता है । साहित्य का पुनरावलोकन प्रत्येक वैज्ञानिक अनुसंधान की प्रक्रिया में एक महत्वपूर्ण कदम है। संबधित साहित्य के अध्ययन के बिना अनुसंधान कर्ता का कार्य अंधेरे मे तीर जैसा लक्ष्य होगा संबधित साहित्य का पुरावलोकन को देखते हुए शोधकर्ता ने वैदिक गणित के व्यावहारिक अनुप्रयोग : एक अध्ययन से संबधित साहित्य का अध्ययन किया ।

गणितीय कुशलता के क्षेत्र में भारत एवम विदेश में पूर्व में किए गये शोधकार्यो का पुनरावलोकन करने पर वैदिक गणित के अध्ययन में वैदिक गणित के क्षेत्र में किए गए शोध कार्य अत्यन्त कम है। सयुंक्त रुप से प्राथमिक एवम उच्च प्राथमिक स्तर पर उत्तर प्रदेश बेसिक शिक्षा परिषद एवम राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद की पाठ्यपुस्तको पर समावेशन का कोई शोध कार्य नही किया गया साथ ही जो कार्य किये गये वैदिक गणित के अत्यंत सीमित क्षेत्र पर किये गये है ।

अत: शोधकर्ता में वैदिक गणित के विस्तृत पक्ष अर्थात नौ संक्रियाओ व्यंजको का गुणनफल, बीजगणितीय व्यंजको का योग, बीजगणितीय व्यंजको का घटाव, युगपत समीकरण, सारणिक का मान ज्ञात करना (अ)तृतीय कोटि के सारणिक (ब)चतुर्थ कोटि के सारणिक, आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात करना, वर्ग समीकरण/द्विघात समीकरण,वर्गमूल, अनुलोम समानुपात/प्रतिलोम समानुपात का उत्तर प्रदेश बेसिक शिक्षा परिषद एवम कक्षा 12 की पाठ्यपुस्तको में समावेशन शोध कार्य की जिज्ञासा उत्पन्न हुई ।

इसलिए शोधकर्ता ने वैदिक गणित के व्यावहारिक अनुप्रयोग : एक अध्ययन नामक शीर्षक को अपने शोध कार्य हेतु चयनित किया ।

चयनित वैदिक गणित संक्रियाएँ

3.1 व्यंजको का गुणनफल

“ऊर्ध्व तिर्यगभ्याम्” सूत्र की सहायता से व्यंजकों का गुणा

(Multiplication of Polynomial by “Urdhva Tiryagbhyam”)

सूत्रः ऊर्ध्व तिर्यगभ्याम

अर्थः उर्ध्व व तिर्यक(सीधे और तिरछे दोनो विधियों से)

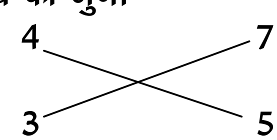
इस सूत्र का उपयोग संख्याओं की ऊर्ध्व व तिर्यक गुणा करने मे करते है।

- ऊर्ध्व गुणा
- तिर्यक गुणा 
- ऊर्ध्व और तिर्यक गुणा 

उदाहरण : 4 व 7 का ऊर्ध्व का गुणा

$$\begin{array}{c} 4 \\ 7 \\ \hline 4 \times 7 \end{array}$$

उदाहरण : (4,7) व (3,5) का ऊर्ध्व का गुणा



$$(4 \times 5) + (3 \times 7)$$

उदाहरण : (1,2,3) व (8,9,5) का ऊर्ध्व गुणा ।

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 5 \end{matrix}$$

$$(1 \times 5) + (2 \times 9) + (3 \times 8)$$

विधिः

1. सर्वप्रथम बीजीय व्यंजक के गुणांकों लिखते है।

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}$$

2. प्रथम स्तम्भ के गुणांको का ऊर्ध्व गुणा करते है।

$$\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} = a_1 a_2$$

3. प्रथम व द्वितीय स्तम्भ के गुणांको का तिर्यक गुणा करते है।

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} = a_1 b_2 + a_2 b_1$$

4. तीनो स्तम्भो का तिर्यक व ऊर्ध्व गुणा करते है।

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} = a_1 c_2 + a_2 c_1 + b_1 b_2$$

5. अन्तिम दो स्तम्भों का तिर्यक गुणा करते है।

$$\begin{matrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{matrix} = b_1 c_2 + b_2 c_1$$

6. अन्त के स्तम्भ के गुणांको का ऊर्ध्व गुणा करते है।

$$\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix} = c_1 c_2$$

इस सूत्र के उपयोग से किए जाने वाली गुणा की प्रक्रिया को निम्न उदाहरणों की सहायता से समझा जा सकता है।

उदाहरणः (2x+3)(2x+9)को हल कीजिए।

हलः	वहुपद	x-आधार की संख्याएँ	
	(2x+3)	2	3
	(2x+9)	2	9

x^2 वाला पद = 2 ↑ 2 = 2×2=4

= $4x^2$

xवाला पद = 2 ╳ 3, 2 ╳ 9 = 2×9+2×3

=24

=24x

xसे स्वतन्त्र पद = 3 ↑ 9 =3×9

=27

इस प्रकार , (2x+3)(2x+9) = $4x^2$+24x+27

उदाहरणः $(9x^2 + 6x + 5)(4x^2 + 6x + 5)$ का गुणा कीजिए।

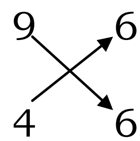
हलः वहुपद	आधार संख्याएँ x^2	x	अचर
$(9x^2 + 6x + 5)$	9	6	5
$(4x^2 + 6x + 5)$	4	6	5

x^4 **का पद** =



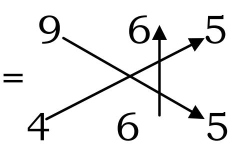
$= 36x^4$

x^3 **वाला पद** =



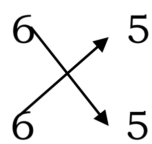
$=9\times6+4\times 6$
$=54+24$
$=78$
$=78x^3$

x^2 **वाला पद** =



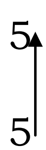
$=9\times5+4\times 5+6\times6$
$=45+20+36$
$=101$
$=101x^2$

x**वाला पद** =



$= 6\times5+6\times5$
$=30+30$
$=60$
$=60x$

x**से स्वतन्त्र पद** =



$=5\times5$

$=25$

अतः

$(9x^2 + 6x + 5)(4x^2 + 6x + 5)$

$= 36x^4+78x^3+101x^2+60x+25$

उदाहरणः $(5x^2-6x+9)$ **मे** $(2x-3)$**से गुणा कीजिए।**

हलः **वहुपद** | | | **x-आधार की संख्याएँ**

वहुपद	x^2	x	अचर
$(5x^2-6x+9)$	5	-6	9
(2x-3)	0	2	-3

x^4 **वाला पद** = 5 ↑ 0 = 5×0=0

= 0

x^3 **वाला पद** = 5, -6 / 0, 2 (तिर्यक गुणन)

$=5\times2+0\times-6$

$=10+0$

$=10$

$=10x^3$

x^2 **वाला पद** = 5, -6, 9 / 0, 2, -3 (तिर्यक गुणन)

$=5\times-3+0\times9+2\times-6$

$=-15+0-12$

$=-27$

$=-27x^2$

x**वाला पद** = -6, 9 / 2, -3 (तिर्यक गुणन)

$= -6\times-3+2\times9$

$=18+18$

$=36$

$=36x$

x**से स्वतन्त्र पद** = 9 ↑ -3

$=9\times-3$

$=-27$

इस प्रकार

$(5x^2-6x+9)(2x-3) = 10x^3-27x^2+36x-27$

3.2 बीजगणितीय व्यंजको का योग
(Addition of Algebraic Expressions)

सूत्रः “एकाधिकेन पूर्वेण”

अर्थः पहले से एक ज्यादा

विधिः

1. सर्वप्रथम बीजीय व्यंजको के गुणांको को लिखते है।
2. समान चर के गुणांक एक साथ लिखते है।
3. अब “एकाधिकेन पूर्वेण” नियम लगाते है।
4. इस निकाय मे ,हासिल के मानों को याद रखने की आवश्यकता नही है। चूँकि इस विधि मे योग की क्रिया में जब भी 9 से अधिक मान प्राप्त होता है,तब बार्यी ओर के अंक पर एकाधिकेन चिन्ह (●) बिन्दु लगाते है तथा जब बिन्दु वाले पदों को जोड़ते है तब उससे एक अधिक जोड़ देते है।

उदाहरण : 1234 व 1972 का योग ज्ञात कीजिए।

हलः

	$\dot{1}$	$\dot{2}$	3	4
+	1	9	7	2
	3	2	0	6

$4+2 = 6$

$3+7 = 10$

$9+2+\underline{1} = 12$ एकाधिकेन चिन्ह का मान

$1+1+\underline{1} = 3$

उदाहरण : 17329,36097 तथा 68379 का योग ज्ञात कीजिए।

हलः

$\dot{1}$	7	$\dot{3}$	$\dot{2}$	9
$\dot{3}$	6	$\dot{0}$	$\dot{9}$	7
6	8	3	7	9
12	1	8	0	5

$9+7+9 = 25$

$2+9+7+\underline{1}+\underline{1} = 20$

$3+3+\underline{1}+\underline{1} = 8$

$7+6+8 = 21$

$6+3+1+\underline{1}+\underline{1} = 12$

रेखांकित 1,एकाधिकेन चिन्ह का मान है।

विधिः

- सर्वप्रथम समान चर के गुणांको को स्तम्भ व पंक्ति मे समान चर के साथ लिखते है।
- बीजीय व्यंजको के ऋणात्मक मान को $(^{-})$ से दर्शाया गया है।

इस सूत्र के उपयोग से किए जाने वाली योग की प्रक्रिया को निम्न उदाहरणों की सहायता से समझा जा सकता है।

उदाहरणः 7a-4b,5a+2b **तथा** -2a-3b **का योग ज्ञात कीजिए।**

बहुपद	चर का गुणांक	
7a-4b	7	$\bar{4}$
5a+2b	5	2
-2a-3b	$\bar{2}$	$\bar{3}$
	10	$\bar{5}$

परिणामी बहुपद = 10a-5b

उदाहरणः $7x+2, 3x^2+5x+1$ **तथा** x^3+x+1 **का योग ज्ञात कीजिए।**

बहुपद	चर का गुणांक			
$7x+2$	0	0	7	2
$3x^2+5x+1$	0	3	5	1
x^3+x+1	1	0	1	1
	1	3	(13)	4

परिणामी बहुपद

$= x^3 + 3x^2 + 13x + 4$

उदाहरण : $3x^3+5x^2+9, 4x^4+2x+3$ व $2x^2+x+8$ का योग ज्ञात कीजिए।

बहुपद	चर का गुणांक				
$3x^3+5x^2+9$	0	3	5	0	9
$4x^4+2x+3$	4	0	0	2	3
$2x^2+x+8$	0	0	2	1	8
	4	3	7	3	(20)

परिणामी बहुपद = $4x^4+3x^3+7x^2+3x+20$

3.3 बीजगणितीय व्यंजको का घटाव (Subtraction of Algebraic Expressions)

एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र के प्रयोग से व्यकलन

इस सूत्र की सहायता से संख्याओं का अन्तर ज्ञात करने के लिए निम्न प्रक्रिया का पालन करते है।

एक संख्या (minuend) में से दूसरी संख्या (subtrahend) को घटाने के लिए दायीं ओर से घटाना प्रारम्भ करते है।

- यदि दूसरी संख्या का मान बड़ा है,तब बायीं ओर की संख्या के ऊपर एक बिन्दु (˙) लगाते है तथा उस अंक को (10+) की संख्या में से घटाते है।
- अब इस बिन्दु वाली संख्या को घटाने के लिए इसे एक अंक बढ़ा लेते है।
- इस प्रक्रिया को संख्या के अन्त तक चलाते है।
- यह विधि निम्न उदाहरणों की सहायता से भली भाँति समझी जा सकती है।

उदाहरण : 36875 में से 16889 को घटाइए।

हल:

3	6	8	7	5
$\dot{1}$	$\dot{6}$	$\dot{8}$	$\dot{8}$	9
1	9	9	8	6

चरण :

- यह सम्भव नही है कि 5 में से 9 को घटाया जा सके । अतः 8 पर एक बिन्दु (˙) लगाते है तथा 15 में से 9 घटाते हैं अर्थात 15-9=6
- अब बिन्दु वाले 8 को घटाने के लिए 8+1 अर्थात 9 को 7 में से घटाते है जोकि सम्भव नही है।
- इसलिए उपरोक्त प्रक्रिया के अनुसार अगले 8 पर एक बिन्दु लगाते हैं तथा 17 में से 9 को घटाते हैं अर्थात 17-9=8

इसी प्रकार ,

18-9=9

16-7=9

तथा 3-2=1

अतः 36875-16889=19986

उदाहरण : 30125 में से 19568 को घटाइए।

हलः

3	0	1	2	5
1̇	9̇	5̇	6̇	8
1	0	5	5	7

चरण :

5 में से 8 को घटाने के लिए , अगले अंक 6 पर एक बिन्दु (˙) लगाइए तथा 15 में से 8 घटाते है।

अर्थात 15-8= 7

अब 2 में से 6 को घटाने के लिए ,5 पर एक बिन्दु लगाते है तथा 12 में से 7 को घटाते है।

अर्थात 12-7=5

इसी प्रकार 11-6=5

10-10=0

तथा 3-2=1

इस प्रकार 30125-19568=10557

एक बहुपद को दूसरे बहुपद मे से घटाने के लिए वैदिक सूत्र " परावर्त्य योजते" का प्रयोग करते है जिसका अर्थ " पक्षान्तरण तथा समायोजन " है।

- सबसे पहले व्यवकल्प के सभी पदो के अंकों के चिन्ह बदलते है तथा ऊपरी बहुपद के संगत पदों में जोड़ते है।

विधिः

- सर्वप्रथम समान चर के गुणांको को स्तम्भ व पंक्ति मे समान चर के साथ लिखते है।
- ऋणात्मक मान को ($^{-}$) से दर्शाया गया है।

पहले बीजीय व्यंजक में से दूसरे बीजीय व्यंजक को घटाइये।

उदाहरण : $2xy - 2y^2 + 3x^2 + 5y^2$ मे से $xy + 3xz - y^2$ को घटाइए।

बहुपद	चर का गुणांक			
	x^2	y^2	xy	xz
$2xy - 2y^2 + 3x^2 + 5y^2$	3	3	2	0
$xy + 3xz - y^2$	0	$\bar{1}$	1	3
	-	-	-	-
	3	4	1	$\bar{3}$

परिणामी बहुपद = $3x^2 + 4y^2 + xy - 3xz$

उदाहरण : $a^2 - 3b^2 + 7ab$ मे से $-a^2 - 3b^2 + 7ab$ को घटाइए।

बहुपद	चर का गुणांक		
	a^2	b^2	ab
$a^2 - 3b^2 + 7ab$	1	$\bar{3}$	7
$-a^2 - 3b^2 + 7ab$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	7
	-	-	-
	2	0	0

परिणामी बहुपद = $2a^2$

3.4 युगपत समीकरण
(Simultaneous Equations)

दो या दो से अधिक चरो की युगपत समीकरणों को हल करने के लिए वैदिक सूत्र "परावर्त्य योजयेत" का प्रयोग करते हैं। जिसका अर्थ " परावर्त व समायोजन " है।

" लोपनास्थापनाभ्याम् " का प्रयोग किया जा सकता है । युगपत समीकरण को निम्न प्रकारों में विभाजित किया जा सकता है।

वैदिक गणित के द्वारा 'युगपत समीकरण'

माना समीकरणें निम्न है

$$a_1x+b_1y = c_1$$

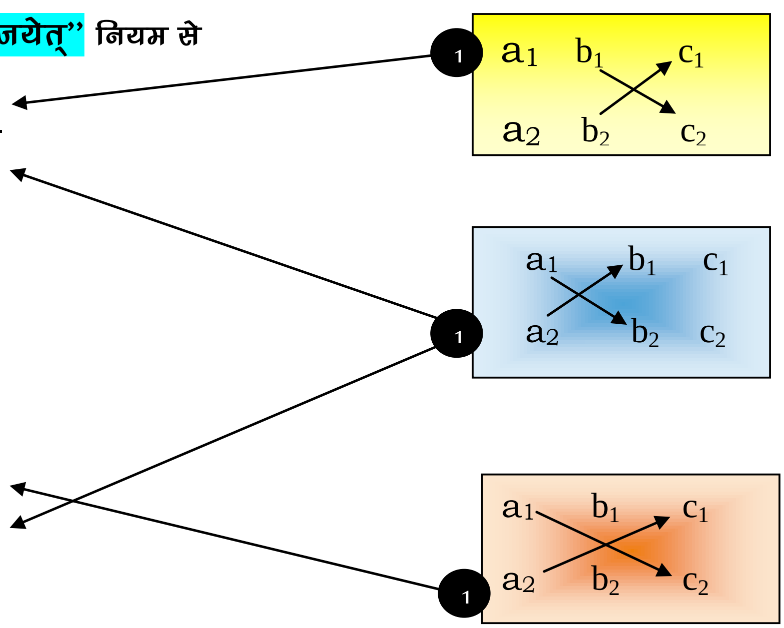
तथा

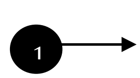
$$a_2x+b_2y = c_2$$

तब **"परावर्त्य योजयेत्"** नियम से

$$X = \frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_2b_1-a_1b_2}$$

$$Y = \frac{a_2c_1-a_1c_2}{a_2b_1-a_1b_2}$$





इसका तात्पर्य यह है कि शुरू यहॉ से करे

उदाहरण :

सरल कीजिए

$x + 2y = 7$ ....(1)

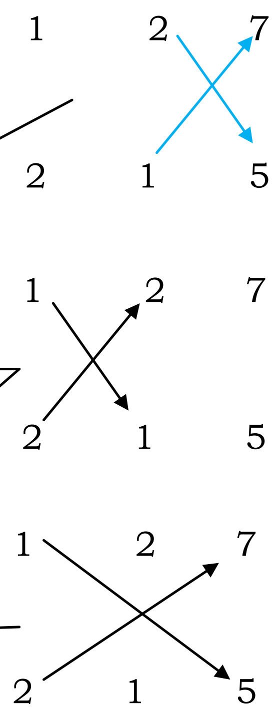
$2x + y = 5$ ....(2)

समीकरण (1)**व** (2) **मे** x **और** y **गुणांको की तुलना** $ax + by = c$ **से करने पर**

$a_1 = 1$ $b_1 = 2$ $c_1 = 7$

$a_2 = 2$ $b_2 = 1$ $c_2 = 5$

वैदिक सूत्र "परावर्त्य योजयेत् " से



$$x = \frac{2\times5-1\times7}{2\times2-1\times1}$$

$$=\frac{3}{3}$$

$$=1$$

$$y = \frac{2\times7-1\times5}{2\times2-1\times1}$$

$$=\frac{14-5}{4-1}$$

$$=\frac{9}{3}$$

$$=3$$

अतः

$$x = 1, y = 3$$

उदाहरण :

सरल कीजिए

$2x$-$7y$ = 9………(1)

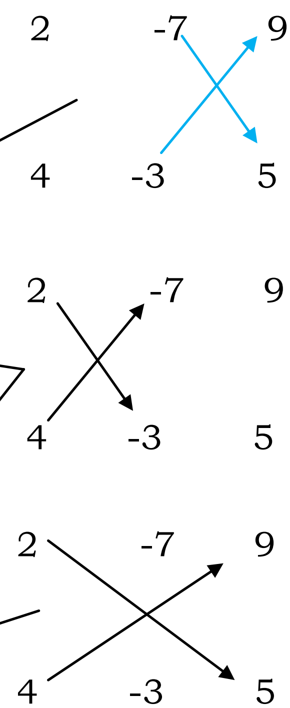
$4x$-$3y$ = 5………(2)

समीकरण (1)व (2) मे x और y गुणांको की तुलना $ax + by = c$ से करने पर

a_1 =2 b_1 =-7 c_1=9

a_2 =4 b_2 =-3 c_2=5

वैदिक सूत्र “परावर्त्य योजयेत् ” से



$$x = \frac{-7\times5-(-3)\times9}{4\times-7-2\times(-3)}$$

$$=\frac{-35+27}{-28+6}$$

$$=\frac{-8}{-22}$$

$$= \frac{4}{11}$$

$$y = \frac{4\times9-2\times5}{4\times-7-2\times-3}$$

$$=\frac{36-10}{-28+6}$$

$$= \frac{26}{-22}$$

$$= \frac{-13}{11}$$

अतः

$x=\frac{4}{11}$,$y=\frac{-13}{11}$

3.5 सारणिक का मान ज्ञात करना

(i)तृतीय कोटि के सारणिक
(Third order determinants)

एक तीसरा क्रम निर्धारक नौ गुणा और विभिन्न जोड़ और घटाव को निर्दिष्ट करने वाले तत्वों का एक लेआउट,या मैट्रिक्स है,जो अन्ततः एकल के लिए अग्रणी होता है। इस प्रकार एक तीसरा क्रम निर्धारक एक सूत्र है जो 3^2=9 अंक को हल करता है ।

- यह विधि सारणिक का मान ज्ञात करने के लिए प्रयुक्त की जाती है।
- यह विधि वैदिक विधि कहलाती है।
- इस विधि को हम निम्न उदाहरणों के माध्यम से समझ सकते है।

उदाहरण :

ज्ञात कीजिए $D = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 9 \end{vmatrix}$

आइये हम पहली पंक्ति को दूसरी और तीसरी से एक विभाजन द्वारा अलग करे

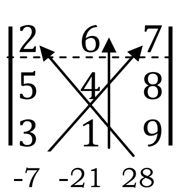
$$D = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 7 \\ \hdashline 5 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

दूसरी और तीसरी पंक्तियों से तीन ,दूसरे क्रम के निर्धारक उत्पन्न होते है।

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7 \ ; \quad \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 21 \ ; \quad \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 28$$

इनमे से चिन्ह आरक्षित है($8 \times 3 - 5 \times 9 = -21$)की गणना करके और तीन पुनः,-7,-21 और 28 को चौथी पंक्ति मे नोट किया गया है।

निर्धारकों का मूल्यांकन



पहली और चौथी पंक्तियों को अब एक साथ लम्बवत और क्रॉसवाइज गुणा किया जाता है,अर्थात हमें प्राप्त होता है-

$$2 \times 28 + 6 \times (-21) + 7 \times (-7) = -119$$

अतः सारणिक का मान

$D = -119$

सारणिक का मान ज्ञात करने के लिए

दूसरी विधि

- सर्वप्रथम सारणिक के अंक लिखते है
- प्रथम दो स्तम्भों को पुनः दार्यी ओर से लिखते है ।(चित्र मे देखे)
- अन्त में क्रासवाइस गुणा करके घटाते है।(चित्र में देखे)
- उत्तर प्राप्त हो जाता हैं।

दूसरी विधि

दो स्तम्भ को पुनः लिखा

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 6 & 7 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 8 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 9 & 3 & 1 \end{array}$$

D=(72+144+35)-(84+16+270)

=251-370

=-119

अन्य उदाहरण :

(i) ज्ञात कीजिए $E = \begin{vmatrix} -3 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 8 & -4 \end{vmatrix}$

$E = +277$

(ii) ज्ञात कीजिए $F = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 9 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$

$F = 270$

(ii) चतुर्थ कोटि का सारणिक

(Fourth order determinants)

चतुर्थ कोटि के सारणिक का मान ज्ञात करना

केन्द्रीय रूप से विभाजन (या तो क्षैतिज या लम्बवत) अब हम विभाजन के दोंनो ओर दूसरे क्रम के निर्धारको का मूल्यांकन करने के लिए आगे बढ़ते है।
यह विधि निम्नलिखित उदाहरणो से समझी जा सकती है–

उदाहरण :

ज्ञात कीजिए $D = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 6 \\ 1 & 6 & 9 & 7 \end{vmatrix}$

सारणिक को दो भागो मे विभाजन करते है जैसे चित्र मे दिखाया गया है

$$= \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ \hdashline 3 & 5 & 7 & 6 \\ 1 & 6 & 9 & 7 \end{vmatrix}$$

विभाजन के ऊपरी क्रम के निर्धारक निम्न प्राप्त होते है।

$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -3 \; ; \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -17 \; ; \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -16$

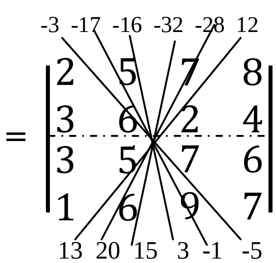
$\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -32 \; ; \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -28 \; ; \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12$

विभाजन के नीचे दूसरे क्रम के निर्धारक उसी क्रम में प्रान्त होते है।

$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 13 \; ; \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 20 \; ; \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 15$

$\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 3; \quad \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -1 \; ; \quad \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} = -5$

सभी मानों को एक साथ लिखने पर जैसा चित्र मे दर्शाया गया है।



सभी मानों का क्रासवाइस गुणा करके जोड़ने पर

$D = (-3) \times (-5) + (12)(13) - (-17)(-1) - (-28)(20) + (-16)(3) + (-32)(15)$

$= 186$

3.6 आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात करना
(Inversion of matrices)

यह सर्वविदित है कि 2×2 मैट्रिक्स के व्युत्क्रम को सीधे नीचे लिखा जा सकता है। इसी प्रक्रिया को तीसरे और चौथे डिग्री वर्ग मैट्रिक्स के व्युत्क्रम को सीधे नीचे लिखने की अनुमति देने के लिए बढ़ाया जा सकता है ।

इसका उपयोग निम्नलिखित उदाहरण में किया जाता है।

उदाहरण :

दिया गया है $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{1\times4-2\times3}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

विकर्णवत मान बदले

केवल चिंह बदले

चरणों की निम्नलिखित व्याख्या उच्च क्रम वाले मैट्रिक्स पर भी लागू होती है

A के तत्वों से A^{-1} के तत्वों को निर्धारित करने के चरण

- प्रमुख विकर्ण के साथ (ऊपर से बाएं से नीचे दाएं)प्रत्येक तत्व को उसके सहकारक से प्रतिस्थापित करें। (पाठक को याद दिलाया जाता है कि i वें पंक्ति और jवें स्तम्भ में तत्व का सहसंयोजक पंक्ति और स्तम्भ को पार करके प्राप्त किया जाता है।)तत्व,जो बचता है उसका निर्धारक लेता है,और$(-1)^{i+j}$ से गुणा करता है।

- प्रत्येक तत्व को प्रमुख विकर्ण में उसकी छवि के कोफेक्टर द्वारा प्रतिस्थापित करें। उपरोक्त उदाहरण मैक्ट्रिक्स मे 2 की दर्पण छवि 3 है, और इस 3 का कोफेक्टर -2 है।

- A,$|A|$.के सारणिक से विभाजित करें।

उदाहरण :

B का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए $= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

हल : $B^{-1} = \frac{-1}{35}\begin{bmatrix} 18 & -5 & -11 \\ -10 & -5 & 10 \\ -11 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

चरण

- ऊपरी बाएँ हाथ के अंक को उसके सहकारक से बदले .$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$=18 इसी तरह ,अग्रणी विकर्ण पर अन्य तत्वों के लिए : 5 को बदले $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$=-5,तथा 4 को $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$=-3 से।
- अन्य तत्वों को उनकी ड़रावनी छवि के सह-कारक द्वारा अग्रणी विकर्ण मे बदल दिया जाता है। उदाहरण के रूप मे पहले कॉलम मे , 4 को 2 के कोफेक्टर द्वारा प्रतिस्थापित किया जाता है , अर्थात $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$=-10, और 3 को ऊपरी दाहिने हाथ 3 के कोफेक्टर द्वारा प्रतिस्थापित किया जाता है , अर्थात $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$=-11
- भाजक ,|B|,B की पहली पंक्ति से B^{-1}. के पहले कॉलम के गुणा से प्राप्त होता है ।

3.7 वर्ग समीकरण / द्विघात समीकरण

सूत्रः चलनकलनाभ्याम्

अर्थ : अवकलन

अवकलन क्या है?

सूत्र : $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

उदाहरण : $\frac{d}{dx}x^5 = 5x^{5-1} = 5x^4$

$\frac{d}{dx}x^3 = 3x^{3-1} = 3x^2$

$\frac{d}{dx}x^9 = 9x^{9-1} = 9x^8$

उपयोग- इस सूत्र का उपयोग निम्न दो दशाओं में किया जाता है

1. द्विघात के मूल ज्ञात करने के लिए
2. 3, 4 व 5 की कोटि के व्यंजको के गुणनखण्ड़ करने के लिए

$ax^2 + bx + c = 0$ रूप की समीकरण द्विघात समीकरण होती है।

नियमः

- सर्वप्रथम समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करते है। और a, b और c के मान ज्ञात करते है।

- द्विघात समीकरण का विविक्तकर ज्ञात करते है अर्थात
  D= $\sqrt{b^2 - 4ac}$

- द्विघात समीकरण का अवकलन " चलनकलनाभ्याम्" सूत्र द्वारा ज्ञात करते है।
  अर्थात, $\frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$

- द्विघात समीकरण के प्रथम अवकल को द्विघात समीकरण के विविक्तकर के वर्गमूल के बराबर रखते है।

  $$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

- अब x के मान ज्ञात कर लेते है।
- यह विधि वहॉ ज्यादा उपयोगी होती है जहॉ द्विघात समीकरण का गुणनखण्ड़ न हो सके ।
- यह वैदिक विधि बहुत उपयोगी है तथा इसे किसी भी प्रकार की द्विघात समीकरण पर उपयोग किया जा सकता है।

उदाहरण :

समीकरण $2x^2 - 5x + 3 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

सर्वप्रथम समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करते है। और a, b और c के मान ज्ञात करते है।

$$a = 2, b = -5, c = 3$$

सर्वप्रथम अवकल निकालते है

$$\frac{d}{dx} 2x^2 - 5x + 3 = 4x - 5 \text{ ....}(1)$$

अब, विविक्तकर निकालते है

$D = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

$= \pm\sqrt{5^2 - 4 \times 2 \times 3}$

$= \pm\sqrt{25 - 24}$

$= \pm 1$ ....(2)

समीकरण (1) व (2) के मान बराबर करने पर

$4x - 5 = \pm 1$

+ चिन्ह लेने पर

$4x - 5 = 1$

4x =1+5

$4x$=6

$x = \frac{3}{2}$

- चिन्ह लेने पर

4x-5 = -1

4x= -1+5

4x=4

X= 1

$x = 3/2$

$x = 1$

उदाहरण :

समीकरण $x^2 - 11x + 18 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

सर्वप्रथम समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करते है। और a, b और c के मान ज्ञात करते है।

$$a = 1, b = -11, c = 18$$

सर्वप्रथम अवकल निकालते है

$\frac{d}{dx} x^2 - 11x + 18 = 2x - 11$ ....(1)

अब ,विविक्तकर निकालते है

D= $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

$= \pm\sqrt{(-11)^2 - 4 \times 1 \times 18}$

$= \pm\sqrt{121 - 72}$

$= \pm\sqrt{49}$

$= \pm 7$ ....(2)

समीकरण (1) व (2) के मान बराबर करने पर

$2x - 11 = \pm 7$

+ चिन्ह लेने पर

$2x - 11 = 7$

$2x = 11+7$

$2x = 18$

$x = 9$

- चिन्ह लेने पर

$2x - 11 = -7$

$2x = -7+11$

$2x = 4$

$x = 2$

3.8 वर्गमूल
(Square root)

द्वन्द्व विधि से वर्गमूल ज्ञात करना

किसी संख्या के वर्गमूल से तात्पर्य है कि वह संख्या जिसे स्वयं से गुणा करने पर दी गई संख्या प्राप्त होती है, तो वह संख्या दी गई संख्या का वर्गमूल होती है।वर्गमूल ज्ञात करने के लिए पारम्परिक विधि मे भाजक प्रत्येक चरण मे बढ़ता ही जाता है।जिससे गणना के समय के साथ साथ कठिनाई स्तर भी बढ़ता जाता है।वर्गमूल ज्ञात करने की सरल विधियों का अध्ययन करने से पहले निम्न बिन्दुओ के बारे मे जानना चाहिए-

- **वर्गमूल ज्ञात करने के लिए दी गई संख्या को दो-दो अंकों के समूहों में दाएँ से बाएँ ओर समूह बनाते है। यदि सख्या मे अंकों की संख्या विषम हो,तब सबसे बाएँ वाले समूह मे केवल एक अंक होगा । वर्गमूल में अंको की संख्या का निर्धारण इन अंकों के समूहों की संख्या से लगाया जा सकता है।**
- n**अंकों वाली संख्या के वर्गमूल में** $\frac{n}{2}$ **या** $\frac{n+1}{2}$ **अंक होगें।**
- **किसी पूर्णाक के वर्ग के अन्त मे या तो 0,1,4,5,6 या 9 होना चाहिए। यह 2,3,7 या 8 के अन्त में समाप्त नही होगें।**
- **यदि किसी संख्या के अन्त मे विषम संख्या मे शून्य न हो ,तो वह पूर्ण संख्या नही होगी । किसी संख्या के वर्गमूल ज्ञात करने की विधि मे निम्न चरण होते है जो निम्न उदाहरणों मे वर्णित किए गए है।**

उदाहरण :

529 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

529 ⟶ $\overline{5}\ \overline{29}$

4	5	₁2 9
	2	3

उत्तर = 23

सरल भाषा में

1. सर्वप्रथम 5 के लिए एक ऐसी वर्ग संख्या सोचते हैं कि 5 से ज्यादा न हो जैसे $2^2 = 4$ जोकि 5 से 1 कम है।

2. अब 2 को 5 के नीचे रख देगे(चित्र से) और शेष को अगली संख्या के आगे रख लेगे। अर्थात 12 हो जायेगी (चित्र से)।

3. अब 2 का दुगुना करेगे 4 हो जायेगा।

4. अब 4 का भाग देगे 12 मे जितनी बार जायेगा वही उसका उत्तर होगा।

अर्थात उत्तर 23 होगा।

विधि :

चरण I दी गई संख्या को दो अंको के समूहों मे दाई ओर से विभाजित करते है।

चरण II यहाँ 529 को भली-भाँति भाजन की स्थिति मे लिखते है।
बाई ओर से पहले समूह के बाद तिरछी रेखा खीचकर संख्या के शेष समूहों से अलग करते है ।

चरण III अब हम उत्तर के पहले अंक को ज्ञात करने के लिए तैयार है ।

इसको भागफल रेखा मे पहले समूह के ठीक ऊपर लिखते है।
यह संख्या सबसे बड़ी एक अंक की संख्या होनी चाहिए। जिसका वर्ग भाज्य रेखा के पहले समूह से कम या उसके बराबर होना चाहिए।

चरण IV उपरोक्त चरण में ज्ञात वर्गमूल के पहले अंक से शेष प्रक्रिया के

लिए भाजक प्राप्त होता है। इसे दुगुना करते है।

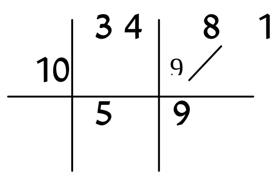
चरण V पहले समूह 5 से पहले भागफल का अंक का वर्ग 4 घटाते है। शेषफल 1 को सकल भाज्य रेखा मे लिखते है।इसे तिरछी रेखा के दाई ओर भाज्य रेखा मे लिखते है।

चरण VI वास्तविक भाज्य 12 को भाज्य 4 से विभाजित करते है।भागफल 3 को तिरछी रेखा के बाद भागफल रेखा मे लिखते है।

चरण VII वास्तविक भाज्य मे सकल भाज्य भागफल का दिक् तिरछी रेखा के दाई ओर लिखते है।
इस प्रक्रिया को समूहों के अन्त तक दोहराते है
भागफल रेखा मे संख्या का वर्गमूल 23 है।

उदाहरण :

3481 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

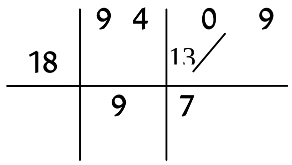


उत्तर = 59

> **सरल भाषा में**
>
> 1. सर्वप्रथम 34 के लिए एक ऐसी वर्ग संख्या सोचते हैं कि 34 से ज्यादा न हो जैसे $5^2 = 25$ जोकि 34 से 9 कम है।
>
> 2. अब 5 को 34 के नीचे रख देगे(चित्र से) और शेष को अगली संख्या के आगे रख लेगे। अर्थात 98 हो जायेगी (चित्र से)।
>
> 3. अब 5 का दुगुना करेगे 10 हो जायेगा।
>
> 4. अब 10 का भाग देगे 98 मे जितनी बार जायेगा वही उसका उत्तर होगा।
>
> अर्थात उत्तर 59 होगा।

उदाहरण :

9409 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।



उत्तर = 97

सरल भाषा में

1. सर्वप्रथम 94 के लिए एक ऐसी वर्ग संख्या सोचते हैं कि 94 से ज्यादा न हो जैसे $9^2 = 81$ जोकि 94 से 13 कम है।

2. अब 9 को 94 के नीचे रख देगे(चित्र से) और शेष को अगली संख्या के आगे रख लेगे। अर्थात 130 हो जायेगी (चित्र से)।

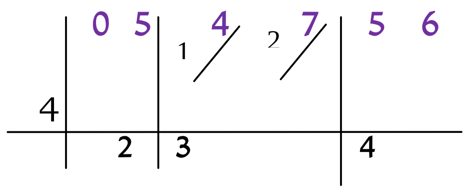
3. अब 9 का दुगुना करेगे 18 हो जायेगा।

4. अब 18 का भाग देगे 130 मे जितनी बार जायेगा वही उसका उत्तर होगा।

अर्थात उत्तर 97 होगा।

उदाहरण :

54756 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।



उत्तर = 234

सरल भाषा में

1. सर्वप्रथम 5 के लिए एक ऐसी वर्ग संख्या सोचते हैं कि 5 से ज्यादा न हो जैसे $2^2 = 4$ जोकि 5 से 1 कम है।

2. अब 2 को 5 के नीचे रख देगे(चित्र से) और शेष को अगली संख्या के आगे रख लेगे। अर्थात 14 हो जायेगी (चित्र से)।

3. अब 2 का दुगुना करेगे 4 हो जायेगा।

4. अब 4 का भाग देगे 14 मे जितनी बार जायेगा उसको नीचे लिखेगे और शेष को आगे वाले अंक के साथ में अर्थात 27 हो जायेगा।
अब 27 में $3^2 = 9$ घटायेगे अर्थात 27–9 = 18 प्राप्त होगा।

अब 18 मे 4 का भाग पुनः देगें जोकि 4 बार जायेगा।

जिस क्रम में 2,3 को लिखा था उसी क्रम में 4 को भी लिखेगें ।
अर्थात उत्तर 2 3 4 होगा।

3.9 अनुलोम समानुपात (Direct proportion) और प्रतिलोम समानुपात(Inverse Proportion)

सूत्रः ऊर्ध्व तिर्यगभ्याम
अर्थः उर्ध्व व तिर्यक(सीधे और तिरछे दोनो विधियों से)

सूत्रः $\frac{M_1D_1H_1E_1}{P_1W_1} = \frac{M_2D_2H_2E_2}{P_2W_2}$

जहॉ M = पुरूष ,महिला,बच्चे या कोई वस्तु

D= दिन

H=समय /चाल

E=क्षमता

P=मूल्य

W=भार,लम्बाई,चौड़ाई,ऊँचाई,गहराई, दूरी

इस सूत्र का उपयोग संख्याओं की तिर्यक गुणा करने मे करते है।

- तिर्यक गुणा



उदाहरण : (4,7) व (3,5) का ऊर्ध्व का गुणा

4   7
3   5

$$(4 \times 5) = (3 \times 7)$$

उदाहरण : एक रेलगाड़ी 2 घंटे में 120 किमी दूरी करती है। उसी चाल से वह 5 घंटे में कितनी दूरी तय करेगी ?

हल : वैदिक सूत्रः

$$\frac{M_1D_1H_1E_1}{P_1W_1} = \frac{M_2D_2H_2E_2}{P_2W_2}$$

$$\frac{2}{120} = \frac{5}{x}$$

$$x = \frac{5 \times 120}{2}$$

$x = 300$ **किमी**

उदाहरण :यदि 6 कलमों का मूल्य 24रू है, तो 7 कलमों का मूल्य कितना होगा ?

हलः वैदिक सूत्रः

$$\frac{M_1 D_1 H_1 E_1}{P_1 W_1} = \frac{M_2 D_2 H_2 E_2}{P_2 W_2}$$

$$\frac{6}{24} = \frac{7}{x}$$

$$x = \frac{7 \times 24}{6}$$

$$x = 28$$

अर्थात मूल्य 28 रूपये है।

उदाहरण : 25 मजदूर एक सप्ताह में 7.5 किमी लम्बी सड़क बनाते है। कितने मजदूर उतने ही समय में 10.2 किमी लम्बी सड़क बना लेगें ?

हलः वैदिक सूत्रः

$$\frac{M_1 D_1 H_1 E_1}{P_1 W_1} = \frac{M_2 D_2 H_2 E_2}{P_2 W_2}$$

$$\frac{25 \times 7}{7.5} = \frac{x \times 7}{10.2}$$

$$x = \frac{25 \times 7 \times 10.2}{7.5 \times 7}$$

$$x = 34$$

उदाहरणः 5 मजदूरों की मजदूरी 1250रू है। 8 मजदूरों के लिए कितनी मजदूरीचाहिए ?

हलः वैदिक सूत्रः

$$\frac{M_1 D_1 H_1 E_1}{P_1 W_1} = \frac{M_2 D_2 H_2 E_2}{P_2 W_2}$$

$$\frac{5}{120} = \frac{8}{x}$$

$$x = \frac{8 \times 120}{5}$$

$x = 8 \times 24$

$x = 192$

उदाहरण 6: एक छात्रावास में 50 छात्रों के लिए 40 दिनों की भोजन सामग्री है । यदि छात्रावासमें 30 छात्र और आ जाएं तो भोजन सामग्री कितने दिनों में समाप्त हो जाएगी?

हल: वैदिक सूत्रः

$$\frac{M_1D_1H_1E_1}{P_1W_1} = \frac{M_2D_2H_2E_2}{P_2W_2}$$

$$50\times 40 = (50+30)\times D_2$$

$$2000 = 80\times D_2$$

$$D_2 = \frac{2000}{80}$$

$$D_2 = 25$$

अर्थात दिनों की संख्या =25

समावेशन हेतु वैदिक गणित के सुझावों को रंगीन बैकग्राउण्ड़ द्वारा दर्शाया गया है।

4.1 कक्षा–7 व्यजंको का गुणनफल

(i) भूमिका

हम 2x,x+5,y-3,-3x+4,6y-12 इत्यादि जैसे बीजीय व्यंजको से परिचित है। इस अध्याय मे हम अध्ययन करेगे कि बीजीय व्यजंक किस प्रकार बनते है तथा इन्हे किस प्रकार संयोजित किया जाता है। एक पदीय व्यजंक मे एक पदीय व्यंजक का गुणा ,दो पदीय व्यजंको का गुणा तथा बहुपदीय व्यंजको का गुणा स्तम्भ विधि और पंक्ति विधि से सीखेगे। बीजगणित मे व्यजंको (expression) को केन्द्रीय अवधारणा माना जाता है।

(ii) एक पदीय बीजीय व्यजंको का गुणा

(a)बीजीय व्यजंक मे संख्या का गुणा

आप कुछ ऐसी परिस्थितियों के बारे मे सोच कर बताइए जिसमे बीजीय व्यंजको का गुणा करना पड़ता है।सबीना ने उत्तर दिया कि किसी भी वस्तु को खरीदते समय उसका मूल्य ज्ञात करने के लिए वस्तु की मात्रा मे उसके क्रय दर का गुणा करना पड़ता है ।जैसे

यदि 5किग्रा आम x रूपये प्रति किग्रा के दर से खरीदना हो तो 5 किग्रा आम का मूल्य ज्ञात करने के लिए 5 किग्रा को x रूपये से गुणा करना पड़ेगा ।

मूल्य = रू $5\times x$

$= 5x$

अतः 5 किग्रा आम का मूल्य रू 5x होगा।

इसी प्रकार

यदि किसी आयत की लम्बाई l=3सेमी और चौड़ाई b=2 सेमी है तो इस आयत का क्षेत्रफल ज्यामितीय रूप से बने चित्र के अनुसार निरूपित होगा ।(आकृति 8.1)

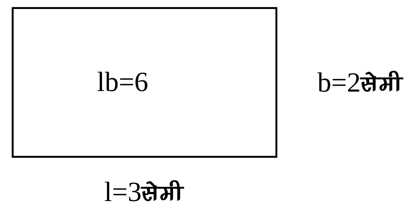
l=3 सेमी

क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

=l×b

=3**सेमी** × 2 **सेमी**

=6 **वर्ग सेमी**



एक पदीय को एक पदीय से गुणा करना

$$x \times 3 \;=\; x + x + x \;=\; 3 \times x \;=\; 3x$$

ध्यान दीजिए एक पदीय व्यंजकों के गुणनफल भी एक पदीय होते है।

✓ **प्रयास कीजिए:**

इसी प्रकार निम्नांकित व्यंजको का गुणा कीजिए तथा ज्यामितीय रूप मे निरूपित कीजिए।

(i)2x× 6 (ii)5× $4y$ (iii)9z× 7 (iv)12a× 6

अतः हम प्राप्त करते है कि

किसी बीजीय व्यंजक को किसी संख्या से गुणा करने के लिए संख्या को बीजीय व्यंजक के गुणांक की संख्या से गुणा करते है।

(b)समान आधार वाले घातांकीय व्यंजको का गुणा

हम जानते है कि $3x \times x = 3x^2$

इसी प्रकार , $4x^2 \times 5x^3$

=$(4 \times 5)x \times x \times x \times x \times x$

=$20x^2$

देखिए ,दो सजातीय आधार वाले पदो के गुणनफल का घातांक ,दोनो पदो के घातांको के योगफल के बराबर है।अर्थात

$$x^2 \times x^3 = x^{2+3} = x^5$$

$$y^3 \times y^2 \times y = y \times y \times y \times y \times y \times y = y^6$$

या $y^3 \times y^2 \times y = y^{3+2+1} = y^6$

समान आधार वाले बीजीय व्यंजको का गुणनफल उसी आधार पर उनके घातांको के योगफल के बराबर होता है।

(c)विभिन्न चर वाले एक पदीय व्यंजको का गुणा

चर राशि का तात्पर्य यह है कि इसका मान स्थिर नही है।

$x \times y$ **को** xy **लिखते है।**

अर्थात $x \times y = xy$

या, $x.y = xy$

इसी प्रकार $x \times y \times z = xyz$

तथा $a \times b \times c = abc$

या, $a.b.c = abc$

4.(iii) एक पदीय व्यंजक और बहुपदीय व्यंजक का गुणा

(i)$5\times(x+4) = 5\times x + 5 \times 4$

$= 5x + 20$

(ii)$8 \times (3x + 2y) = 8 \times 3x + 8 \times 2y$

$= 24x + 16y$

(iii)$2x \times (4x - 3y) = 2x \times 4x - 2x \times 3y$

$= 8x^2 - 6xy$

✓ **प्रयास कीजिए:**

निम्नांकित व्यजंको का गुणनफल ज्ञात कीजिए:

(i)$5y(3y^2 - 2z)$ (ii)$2y(5x + 2x^2)$

4.(iv) बहुपदीय व्यंजकों का गुणा

हम जानते है कि ,

$$(a+b) \times p = ap + bp$$

यदि $p = (c+d)$

तो, $(a+b)\times(c+d) = a(c+d)+b(c+d)$

$= ac+ad+bc+bd$

इसी प्रकार, $(x+y)\times(z+2) = x(z+2)+y(z+2)$

$= xz+2x+yz+2y$

तथा $(2x+3)(y-z) = 2x(y-z)+3(y-z)$

$= 2xy-2xz+3y-3z$

उदाहरण 1: $(2x+3y)$**और**$(3x-4y)$**का गुणा कीजिए।**

हलः पंक्ति विधि

$(2x+3y).(3x-4y)$

$= 2x(3x-4y)+3y(3x-4y)$

$= 6x^2-8xy+9xy-12y^2$

$= 6x^2+xy-12y^2$

स्तम्भ विधि

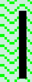
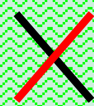
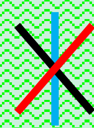
$$\begin{array}{l} \quad 2x+3y \\ \times(3x-4y) \\ \hline \quad 6x^2+9xy \\ \qquad\quad -8xy-12y^2 \\ \hline 6x^2+xy-12y^2 \\ \hline \end{array}$$

वैदिक गणित के द्वारा :

सूत्रः ऊर्ध्व तिर्यगभ्याम

अर्थः ऊर्ध्व व तिर्यक(सीधे और तिरछे दोनो विधियों से)

इस सूत्र का उपयोग संख्याओं की ऊर्ध्व व तिर्यक गुणा करने मे करते है।

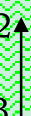
- **ऊर्ध्व गुणा** 
- **तिर्यक गुणा** 
- **ऊर्ध्व और तिर्यक गुणा** 

$(2x + 3y)$**और**$(3x - 4y)$**का गुणा कीजिए।**

हलः

वहुपद	**आधार की संख्याएँ**	
	x	y
(2x+3y)	2	3
(3x-4y)	3	-4

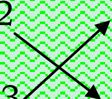
x^2**वाला पद** =



= 2×3=6

= $6x^2$

xy**वाला पद** =



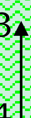
$=2 \times -4 + 3 \times 3$

=-8+9

=1

=xy

y^2 **वाला पद** =



$=3\times -4$

=-12

=-12y^2

इस प्रकार ,

(2x+3y)(3x-4y) = $4x^2$+xy-12y^2

उदाहरण:

$(5x^2-6x+9)$ **मे** $(2x-3)$**से गुणा कीजिए।**

$$
\begin{array}{r}
5x^2 - 6x + 9 \\
\times \quad 2x - 3 \\
\hline
10x^3 - 12x^2 + 18x \quad \\
-15^2 + 18x - 27 \\
\hline
10x^3 - 27^2 + 36x - 27 \\
\hline
\end{array}
$$

वैदिक विधि:

1. **सर्वप्रथम बीजीय व्यंजक के गुणांकों लिखते है।**

   $a_1 \quad b_1 \quad c_1$

   $a_2 \quad b_2 \quad c_2$

2. **प्रथम स्तम्भ के गुणांको का ऊर्ध्व गुणा करते है।**

   a_1

   $a_2 \quad = a_1\, a_2$

3. **प्रथम व द्वितीय स्तम्भ के गुणांको का तिर्यक गुणा करते है।**

   $a_1 \quad b_1$

   $a_2 \quad b_2 \quad = a_1\, b_2 + a_2\, b_1$

4. **तीनो स्तम्भो का तिर्यक व ऊर्ध्व गुणा करते है।**

   $a_1 \quad b_1 \quad c_1$

   $a_2 \quad b_2 \quad c_2 \quad = a_1\, c_2 + a_2\, c_1 + b_1\, b_2$

5. **अन्तिम दो स्तम्भों का तिर्यक गुणा करते है।**

   $b_1 \quad c_1$

   $b_2 \quad c_2 \quad = b_1\, c_2 + b_2\, c_1$

6. **अन्त के स्तम्भ के गुणांको का ऊर्ध्व गुणा करते है।**

   c_1

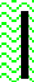
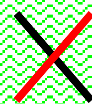
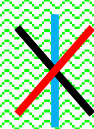
   $c_2 \quad = c_1\, c_2$

वैदिक गणित के द्वारा

सूत्रः ऊर्ध्व तिर्यगभ्याम

अर्थः ऊर्ध्व व तिर्यक(सीधे और तिरछे दोनो विधियों से)

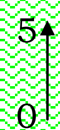
इस सूत्र का उपयोग संख्याओं की ऊर्ध्व व तिर्यक गुणा करने मे करते है।

- **ऊर्ध्व गुणा** 
- **तिर्यक गुणा** 
- **ऊर्ध्व और तिर्यक गुणा** 

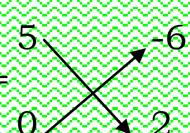
($5x^2$-$6x$+9) मे ($2x$-3)से गुणा कीजिए।

हलः

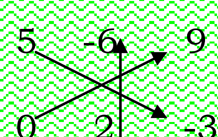
वहुपद	**आधार की संख्याएँ**		
	x^2	x	**अचर**
($5x^2$-$6x$+9)	5	-6	9
(2x-3)	0	2	-3

x^4 **वाला पद** = 

=5× 0
=0
=0

x^3 **वाला पद** = 

$=5\times 2+0\times -6$
=10
$=10x^3$

x^2 **वाला पद** = 

$=5\times -3+0\times 9+2\times -6$
=-15+0-12

$=-27$
$=27x^2$

x वाला पद =

$$\begin{matrix} -6 & \nearrow\!\!\!\!\searrow & 9 \\ 2 & & -3 \end{matrix}$$

$=-6\times -3+9\times 2$
$=18+18$
$=36$
$=36x$

x से स्वतन्त्र पद =

$$\begin{matrix} 9 \\ \uparrow \\ -3 \end{matrix}$$

$=9\times -3$
$=-27$
$=27x$

इस प्रकार,

$(5x^2-6x+9)(2x-3)$
$= 10x^3-27x^2+36x-27$

इसी प्रकार से अन्य उदाहरण भी किये जा सकते है-

(i) $(x+2)(x+5)$
(ii) $(x-4)(x+7)$
(iii) $(x-3)(x-8)$
(iv) $(x^2+5)(x^2-7)$
(v) $(3x+8)(4x-7)$
(vi) $(5x-3y)(3x+4y)$

4.2 कक्षा- 6 बीजगणितीय व्यंजको का योग
(Addition of Algebraic Expressions)

आइये इसे समझने के लिए कुछ समस्याओं पर विचार करे।

1. **डेविड,शालूऔर सलीम साथ -साथ खेलते है,खेल खेल मे डेविड शालू से कहता है कि तुम्हारे पास सलीम से 12 गोलियाँ अधिक है और मेरे पास तुम दोनो से 5 गोलियाँ अधिक है। डेविड के गोलियों की संख्या कैसे ज्ञात करें?**

   - **चूँकि यहाँ सलीम के पास गोलियों की संख्या ज्ञात नही है,इसलिए हम यहाँ सलीम की गोलियों की संख्या x मान लेते है,अब शालू के पास सलीम से**

12 गोलियाँ अधिक है,इसलिए शालू के गोलियों की संख्या $x + 12$ होगी,पुनः डेविड के पास दोनो की गोंलियो के योग $[x + (x + 12]$से 5 अधिक है।

इसलिए डेविड की गोलियों की संख्या $= x + x + 12 + 5 = 2x + 17$

2. राहुल के पिता की वर्तमान आयु राहुल की आयु की चार गुनी है।उसके चाचा की आयु उसके पिता की आयु और उसकी आयु के योंग से 6 वर्ष कम है।आप राहुल के चाचा की आयु किस प्रकार ज्ञात करेगे?

   - चूँकि राहुल की आयु ज्ञात नही है,इसलिए मान लें कि राहुल की वर्तमान आयु y वर्ष है।अब उसके पिता की आयु $4y$ है।अब राहुल के चाचा की उम्र ज्ञात करने के लिए राहुल और उसके पिता की आयु का योग $(y + 4y)$ज्ञात कर उसमे 6 वर्ष कम कर देतें है।

     इसलिए राहुल के चाचा की आयु वर्ष $= y + 4y - 6 = 5y - 6$

❖ आइये $5x, 7x$ को जोडें । हम जानते है कि xएक बीजीय संख्या है। इसलिए $5x$और $7x$समानपदीय संख्याएं हैं।

इसलिए $5x + 7x = (5 + 7)x = 12x$

इसी प्रकार $6xy, 7xy$ और xy को जोडें।

$6xy + 7xy + xy = (6 + 7 + 1)xy \quad = 14xy$

उदाहरणः

प्रश्न. 7a-4b,5a+2b तथा -2a-3b का योग ज्ञात कीजिए।

हलः

(7a-4b)+(5a+2b)+(-2a-3b)

गुणांक a और b के पद एक साथ लिखने पर

=[7a+5a+(-2a)]+[(-4b)+2b+(-3b)]

=[7a+5b-2a]+[-4b+2b-3b]

[12a-2a]+[2b-7b]

10a+(-5b)

10a-5b

वैदिक गणित के द्वारा :

सूत्रः "एकाधिकेन पूर्वेण"

अर्थः पहले से एक ज्यादा

विधिः

1. सर्वप्रथम बीजीय व्यंजको के गुणांको को लिखते है।
2. समान चर के गुणांक एक साथ लिखते है।
3. अब "एकाधिकेन पूर्वेण" नियम लगाते है।
4. इस निकाय मे ,हासिल के मानों को याद रखने की आवश्यकता नही है। चूँकि इस विधि मे योग की क्रिया में जब भी 9 से अधिक मान प्राप्त होता है,तब बायीं ओर के अंक पर एकाधिकेन चिन्ह (●) बिन्दु लगाते है तथा जब बिन्दु वाले पदों को जोड़ते है तब उससे एक अधिक जोड़ देते है।

विधिः

- सर्वप्रथम समान चर के गुणांको को स्तम्भ व पंक्ति मे समान चर के साथ लिखते है।
- बीजीय व्यंजको के ऋणात्मक मान को (‾) से दर्शाया गया है।

इस सूत्र के उपयोग से किए जाने वाली योग की प्रक्रिया को निम्न उदाहरणों की सहायता से समझा जा सकता है।

वैदिक गणित द्वारा हलः

प्रश्न. 7a-4b,5a+2b **तथा** -2a-3b **का योग ज्ञात कीजिए।**

बहुपद	चर का गुणांक	
7a-4b	7	$\bar{4}$
5a+2b	5	2
-2a-3b	$\bar{2}$	$\bar{3}$
	10	$\bar{5}$

परिणामी बहुपद = 10a-5b

प्रश्नः $7x+2, 3x^2+5x+1$ **तथा** x^3+x+1 **का योग ज्ञात कीजिए।**

हलः $(7x+2)+(3x^2+5x+1)+(x^3+x+1)$

x^3, x^2, x **व अचर पदो को एक साथ लिखने पर**

$=7x+2+3x^2+5x+1+x^3+x+1$

$= x^3+3x^2+(7x+5x+x)+(2+1+1)$

$= x^3+3x^2+(13x)+(4)$

$= x^3+3x^2+12x+4$

वैदिक गणित द्वारा हलः

प्रश्नः $7x+2, 3x^2+5x+1$ **तथा** x^3+x+1 **का योग ज्ञात कीजिए।**

बहुपद	चर का गुणांक			
$7x+2$	0	0	7	2
$3x^2+5x+1$	0	3	5	1
x^3+x+1	1	0	1	1
	1	3	(13)	4

परिणामी बहुपद

$= x^3 + 3x^2 + 13x + 4$

प्रश्न:$3x^3+5x^2+9, 4x^4+2x+3$ **व** $2x^2+x+8$ **का योग ज्ञात कीजिए।**

हल:

$(3x^3+5x^2+9)+(4x^4+2x+3)+(2x^2+x+8)$

x^4, x^3, x^2, x **व अचर पदो को एक साथ लिखने पर**

$=3x^3+5x^2+9+4x^4+2x+3+2x^2+x+8$

$=4x^4+3x^3+(5x^2+2x^2)+(2x+x)+(9+8+3)$

$=4x^4+3x^3+(7x^2)+(3x)+(20)$

$=4x^4+3x^3+7x^2+3x+20$

वैदिक गणित द्वारा हल:

प्रश्न:$3x^3+5x^2+9, 4x^4+2x+3$ **व** $2x^2+x+8$ **का योग ज्ञात कीजिए।**

बहुपद	चर का गुणांक				
$3x^3+5x^2+9$	0	3	5	0	9
$4x^4+2x+3$	4	0	0	2	3
$2x^2+x+8$	0	0	2	1	8
	4	3	7	3	(20)

परिणामी बहुपद = $4x^4+3x^3+7x^2+3x+20$

4.3 कक्षा-6 बीजगणितीय व्यंजको का घटाव
(Subtraction of Algebraic Expressions)

पहले बीजीय व्यंजक मे से दूसरे बीजीय व्यंजक को घटाइये।

प्रश्नः 2xy $-2y^2+3x^2+5y^2$ **मे से** xy+3xz$-y^2$**को घटाइए।**

हलः $(2xy -2y^2+3x^2+5y^2) -(xy+3xz-y^2)$

समान पदो को एक साथ लिखने पर

$=2xy -2y^2+3x^2+5y^2 -xy-3xz+y^2$

$=3x^2 + (y^2-2y^2 + 5y^2) + (2xy - xy) -3xz$

$=3x^2 +(4y^2)+(xy) -3xz$

$=3x^2+4y^2+xy-3xz$

वैदिक गणित के द्वारा हल :

एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र के प्रयोग से व्यकलन

इस सूत्र की सहायता से संख्याओं का अन्तर ज्ञात करने के लिए निम्न प्रकिया का पालन करते है।

एक संख्या (minuend) में से दूसरी संख्या (subtrahend) को घटाने के लिए दायीं ओर से घटाना प्रारम्भ करते है।

- **यदि दूसरी संख्या का मान बड़ा है,तब बायीं ओर की संख्या के ऊपर एक बिन्दु (˙) लगाते है तथा उस अंक को (10+) की संख्या में से घटाते है।**
- **अब इस बिन्दु वाली संख्या को घटाने के लिए इसे एक अंक बढ़ा लेते है।**
- **इस प्रक्रिया को संख्या के अन्त तक चलाते है।**
- **यह विधि निम्न उदाहरणों की सहायता से भली भाँति समझी जा सकती है।**

एक बहुपद को दूसरे बहुपद मे से घटाने के लिए वैदिक सूत्र " परावर्त्य योजते" का प्रयोग करते है जिसका अर्थ " पक्षान्तरण तथा समायोजन " है।

- **सबसे पहले व्यवकल्प के सभी पदो के अंकों के चिन्ह बदलते है तथा ऊपरी बहुपद के संगत पदों में जोड़ते है।**

विधिः

- सर्वप्रथम समान चर के गुणांको को स्तम्भ व पंक्ति मे समान चर के साथ लिखते है।
- ऋणात्मक मान को ($^{-}$) से दर्शाया गया है।

वैदिक गणित द्वारा हलः

प्रश्नः 2xy $-2y^2+3x^2+5y^2$ **मे से** xy+3xz-y^2**को घटाइए।**

बहुपद	चर का गुणांक			
	x^2	y^2	xy	xz
2xy $-2y^2+3x^2+5y^2$	3	3	2	0
xy+3xz-y^2	0	$\bar{1}$	1	3
	-	-	-	-
	3	4	1	$\bar{3}$

परिणामी बहुपद = $3x^2+4y^2$+xy-3xz

उदाहरण : a^2-3b^2+7ab **मे से** $-a^2$-3b^2+7ab **को घटाइए।**

हलः

(a^2-3b^2+7ab)–($-a^2$-3b^2+7ab)

समान पदो को एक साथ लिखने पर

= a^2-3b^2+7ab +a^2+3b^2-7ab

=(a^2+a^2)+(-3b^2 + 3b^2) + (−7ab + 7ab)

=2a^2+0+0

=2a^2

वैदिक गणित द्वारा हलः

प्रश्नः a^2-$3b^2$+7ab **मे से** $-a^2$-$3b^2$+7ab **को घटाइए।**

बहुपद	चर का गुणांक		
	a^2	b^2	ab
a^2-$3b^2$+7ab	1	$\bar{3}$	7
$-a^2$-$3b^2$+7ab	$\bar{1}$	$\bar{3}$	7
	-	-	-
	2	0	0

परिणामी बहुपद = $2a^2$

4.4 कक्षा– 8 युगपत समीकरण

यहॉ समीकरणो $a_1x+b_1y+c_1=0$ और $a_2x+b_2y+c_2=0$ मे x और y दो चर तथा a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 अचर राशियॉ है। इस प्रकार के समीकरणो को युगपत समीकरण कहते है।युगपत का अर्थ साथ साथ होना है।यहॉ हम देखेगे कि प्रथम समीकरण मे x के सापेक्ष y के मानो मे से x और y के जो मान द्वितीय समीकरण को संन्तुष्ट करता है,यही युगपत समीकरण का हल है।

युगपत समीकरण का हल

निम्नलिखित उदाहरण–

1. **दो अज्ञात चर वाले रैखिक समीकरण 2x+y=5 और 3x-y=10के हल पर विचार करें।**

   इनका हल ज्ञात करने के लिये दोनो समीकरणो के द्वारा x के विभिन्न मानो के सापेक्ष yके विभिन्न मानों को ज्ञात कर सारणीबद्ध करते है।

   समीकरण 2x+y=5 मे xके सापेक्ष y के मान की सारणी

x	1	2	3	4	0	-1	-2	-3	-4
y	3	1	-1	-3	5	7	9	11	13

समीकरण 3x-y=10 मे x के सापेक्ष y के मान की सारणी

X	1	2	3	4	0	-1	-2	-3	-4
Y	-7	-4	-1	2	-10	-13	-16	-19	-22

दोनो सारणियो को देखने से स्पष्ट है कि दोनो मे केवल x=3 और y=-1उभयनिष्ठ है।अतः x=3 और y=-1 समीकरणो 2x+y=5 और 3x-y=10 को सन्तुष्ट करते है।इसलिए x=3 और y=-1 इन समीकरणो का हल हो गया।

हम देखते है कि केवल प्रथम स्थिति मे ही समीकरणो का अद्वितीय हल प्राप्त होता है।अतःप्रथम स्थिति मे ही रेखीय समीकरण युग्म,युगपत समीकरण है।पुनः यदि हम ध्यान दे तो पाते है कि प्रथम स्थिति मे

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{-1} = -1$$

अर्थात

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ जब कि अन्य दानो स्थितियों मे $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

इस प्रकार

दो अज्ञात चर वाले रैखिक समीकरणो $a_1x+b_1y+c_1=0$ तथा $a_2x+b_2y+c_2=0$ को युगपत समीकरण कहते है यदि

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

युगपत समीकरण को हल करने की विधियाँ

युगपत समीकरण को सारणी बनाकर हल करते समय हमने देखा कि सारणी बना कर युगपत समीकरणों को हल करने की विधि सुविधाजनक नही है। इसलिए प्रायः निम्नांकित दो विधियो को प्रयोग युगपत समीकरणो को हल करने मे किया जाता है-

(1)प्रतिस्थापन विधि

(2)विलापन विधि

(1)प्रतिस्थापन विधि

इस विधि के अन्तर्गत हम एक समीकरण से एक अज्ञात चर का मान दूसरे अज्ञात चर के पद मे व्यक्त करके दसे दूसरे समीकरण मे प्रतिस्थापित कर दूसरे अज्ञात चर का मान ज्ञात करते है हैर उस चर का मान किसी समीकरण मे पतिस्थापित करके प्रथम अज्ञात चर को ज्ञात करते है । इसलिए इस विधि को प्रतिस्थापन विधि कहते है।

उदाहरणः

हल कीजिए x+2y = 7...(1)

2x+y = 5...(2)

समीकरण (1) द्वारा

x=7-2y...................................(3)

समीकरण (1) तथा (2) युगपत समीकरण है,

समीकरण (1) से प्राप्त x का मान समीकरण (2) को सन्तुष्ट करना चाहिए।

अतःसमीकरण (3) से प्राप्त x का मान समीकरण (2) मे प्रतिस्थापित करने पर,

$2(7-2y)+y = 5$

$14-4y+y = 5$

$14-3y = 5$

$-3y = 5-14$

$-3y = -9$

$3y = 9$

$y = \frac{9}{3}$

$y = 3$

अब y का मान समीकरण(3) मे प्रतिस्थापित करने पर,

$x = 7 - 2\times3$

$= 7 - 6$

$x = 1$

अतः युगपत समीकरणों का हल $x = 1$ **और** $y = 3$ **है।**

वैदिक गणित के द्वारा हल :

$x+2y = 7$……..(1)

$2x+y = 5$……..(2)

x और y गुणांको की तुलना करने पर

$a_1 = 1$ $b_1 = 2$ $c_1 = 7$

$a_2 = 2$ $b_2 = 1$ $c_2 = 5$

"परावर्त्य योजयेत्" नियम से

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_2b_1 - a_1b_2}$$

$$= \frac{2\times5 - 1\times7}{2\times2 - 1\times1}$$

$$= \frac{3}{3}$$

$$= 1$$

$$y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2}$$

$$= \frac{2\times7 - 1\times5}{2\times2 - 1\times1}$$

$$= \frac{14-5}{4-1}$$

$$= \frac{9}{3}$$

$$= 3$$

अतः $x = 1$

$y = 3$

4.5 कक्षा-12 सारणिक का मान ज्ञात करना

हम n कोटि के प्रत्येक वर्ग आव्यूह A=$[a_{ij}]$ को एक संख्या (वास्तविक या सम्मिश्र)

द्वारा संबधित करा सकते हैं जिसे वर्ग आव्यूह का सारणिक कहते हैं । इसे एक फलन की तरह सोचा जा सकता है जो प्रत्येक आव्यूह को एक अद्वितीय संख्या (वास्तविक या सम्मिश्र) से संबधित करता है।

यदि M वर्ग आव्यूहों का समुच्चय हैं , k सभी संख्याओं वास्तविक या सम्मिश्र का समुच्चय है और f : M→k, f(A)=k, के द्वारा परिभषित है जहाँ A ∈ M और k ∈ K तब f(A),A का सारणिक कहलाता है। इसे [A] या det (A) या Δ के द्वारा भी निरूपित किया जाता है ।

3×3कोटि के आव्यूह का सारणिक

तृतीय कोटि के आव्यूह के सारणिक को द्वितीय कोटि के सारणिकों में व्यक्त करके ज्ञात किया जाता है। यह एक सारणिक का एक पंक्ति (या एक स्तंभ) के अनुदिश प्रसरण कहलाता है। तृतीय कोटि के सारणिक को छः प्रकार से प्रसारित किया जाता है तीनों पंक्तियों (R_1,R_2 तथा R_3) में से प्रत्येक के संगत और तीनों स्तंभ (C_1, C_2 तथा C_3) में से प्रत्येक के संगत दर्शाए गए प्रसरण समान परिणाम देते हैं जैसा कि निम्नलिखित स्थितियों में स्पष्ट किया गया हैं।

वर्ग आव्यूह A=$[a_{ij}]$ के सारणिक पर विचार करते हैं।

जहाँ $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

प्रथम पंक्ति (R_1) के अनुदिश प्रसरण

$$|A|=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

चरण 1 R_1के पहले अवयव a_{11}को $(-1)^{(1+1)}[(-1)^{a_{11}\text{ में अनुलग्नों का योग}}]$ और सारणिक $|A|$ की पहली पंक्ति (R_1) तथा पहला स्तंभ (C_1) के अवयवों को हटाने से प्राप्त द्वितीय कोटि के सारणिक से गुणा कीजिए क्योंकि a_{11}, R_1और C_1में स्थित है

अर्थात् $$(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

चरण 2 क्योंकि a_{12}, R_1 तथा C_2 में स्थित है इसलिए R_1 के दूसरें अवयव a_{12} को $(-1)^{1+2}$ $[(-1)^{a_{12}\text{ में अनुलग्नों का योग}}]$ और सारणिक $|A|$ की पहली पंक्ति (R_1) व दूसरे स्तंभ (C_2) को हटाने से प्राप्त द्वितीय क्रम के सारणिक से गुणा कीजिए

अर्थात् $$(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

चरण 3 क्योंकि a_{13}, R_1 तथा c_3में स्थित है इसलिए R_1 के तीसरे अवयव को $(-1)^{1+3}$ $[(-1)^{a_{13}\text{ में अनुलग्नों का योग}}]$ और सारणिक $|A|$की पहली पंक्ति (R_1) व तीसरे स्तंभ (C_3) को हटाने से प्राप्त तृतीय कोटि के सारणिक से गुणा कीजिए

अर्थात् $$(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

चरण 4 अब A का सारणिक अर्थात् |A|के व्यंजक को उपरोक्त चरण 1, 2 व 3 से प्राप्त तीनों पदों का योग करके लिखिए अर्थात्

$$\det A=|A|= (-1)^{1+1} a_{11}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

या $|A| = a_{11}(a_{22}\,a_{33} - a_{32}\,a_{23}) - a_{12}\,(a_{21}\,a_{33} - a_{31}\,a_{23})$
$+a_{13}\,(a_{21}\,a_{32} - a_{31}a_{22})$

$$= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{32}\,a_{23} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{12}\,a_{31}\,a_{23} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{31}\,a_{22}$$

उदाहरण : **सारणिक** $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ -1 & 3 & 0\\ 4 & 1 & 0\end{vmatrix}$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हलः **ध्यान दीजिए कि तीसरे स्तंभ में दो प्रविष्टियाँ शून्य हैं। इसलिए तीसरे स्तंभ (c_3)के अनुदिश प्रसरण करने पर हमें प्राप्त होता है कि**

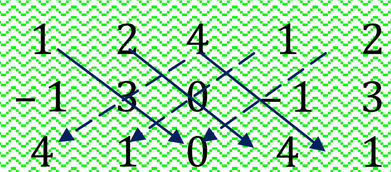
$$\Delta= 4\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 4 & 1\end{vmatrix} -0\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix} +0\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}$$

$$-4\,(-1-12)-0+0=-52$$

वैदिक गणित के द्वारा हल :

- **सर्वप्रथम सारणिक के अंक लिखते है**
- **प्रथम दो स्तम्भों को पुनः दायीं ओर से लिखते है ।(चित्र मे देखे)**
- **अन्त में क्रासवाइस गुणा करके घटाते है।** **(चित्र में देखे)**
- **उत्तर प्राप्त हो जाता हैं।**

वैदिक विधिः



D=(0+0-4)-(48+0+0)
= - 4 - 48
=-52

उदाहरण : सारणिक $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : प्रथम पंक्ति (R_1)के अनुदिश प्रसरण करने पर हमें प्राप्त होता है कि

$$\Delta= 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} -3\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

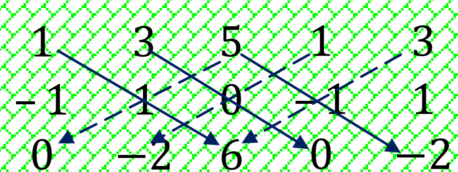
$$= 1(6-0) - 3(-6-0) + 5(2-0)$$

$$= 6 + 18 + 10 = 34$$

वैदिक गणित के द्वारा हल :

- **सर्वप्रथम सारणिक के अंक लिखते है**
- **प्रथम दो स्तम्भों को पुनः दायीं ओर से लिखते है ।(चित्र मे देखे)**
- **अन्त में क्रासवाइस गुणा करके घटाते है।** **(चित्र में देखे)**
- **उत्तर प्राप्त हो जाता हैं।**

वैदिक विधिः



D=(6+0+10)-(0-0-18)
= 16+18
=34

4.6 कक्षा–12 आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात करना
(Adjoint and Inverse of a Matrix)

इस अनुच्छेद मे हम एक आव्यूह के व्युत्क्रम के अस्तित्व के लिए शर्तों की व्याख्या करेगें। A^{-1}ज्ञात करने के लिए पहले हम एक आव्यूह का सहखण्ड परिभाषित करेगे।

आव्यूह का सहखण्ड

एक वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]$ का सहखण्ड , आव्यूह$[A_{ij}]$ के परिवर्त के रूप मे परिभाषित है ,
जहाँ A_{ij} अवयव a_{ij} का सहखण्ड है। आव्यूह A के सहखण्ड को $adj\ A$ के द्वारा व्यक्त करते है।

माना $$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

सभी के सहखण्ड़ज निकालने पर

$$B = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

तब $adj\ A = B$ **का परिवर्त रूप**

$$adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

आव्यूह का व्युत्क्रम

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj A}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

उदाहरण : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ **का व्युत्क्रम (यदि अस्तित्व हो)ज्ञात कीजिए।**

हल : मान लीजिए $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 10,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -10,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

अतः $B = \begin{vmatrix} 10 & 0 & 0 \\ -10 & 5 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix}$

Adj A = B **का परिवर्त रूप**

$$= \begin{vmatrix} 10 & -10 & 2 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

अब $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 1(10-0) - 0 + 0$$

$$= 10 \neq 0$$

A^{-1} **का अस्तित्व है।**

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA = \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 10 & -10 & 2 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

वैदिक गणित द्वारा हल :

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ **का व्युत्क्रम (यदि अस्तित्व हो) ज्ञात कीजिए।**

सभी के सहखण्ड़ज निकालने पर

$$A = \begin{vmatrix} 10 & 0 & 0 \\ -10 & 5 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 10$$

$$A = \begin{vmatrix} 10 & 0 & 0 \\ -10 & 5 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

विकर्णवत को छोड़कर शेष अवयवो को प्रतिबिम्बित लिखने पर

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 10 & -10 & 2 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

उदाहरणः $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ **का व्युत्क्रम (यदि अस्तित्व हो)ज्ञात कीजिए।**

हल : मान लीजिए $A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 25,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 13,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 10$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -20,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 15,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 8$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 16,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -12,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 11,$$

अतः $B = \begin{vmatrix} 25 & 13 & 10 \\ -20 & 15 & 8 \\ 16 & -12 & 11 \end{vmatrix}$

Adj A = B **का परिवर्त रूप**

$$= \begin{vmatrix} 25 & -20 & 16 \\ 13 & 15 & -12 \\ 10 & 8 & 11 \end{vmatrix}$$

अब $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

$= (25 - 0) - 4(5 + 8) + 0$

$=75-52$

$= 23 \neq 0$

A^{-1} **का अस्तित्व है।**

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA = \frac{1}{23}\begin{vmatrix} 25 & -20 & 16 \\ 13 & 15 & -12 \\ 10 & 8 & 11 \end{vmatrix}$$

वैदिक गणित द्वारा हल :

$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ **का व्युत्क्रम (यदि अस्तित्व हो) ज्ञात कीजिए।**

सभी के सहखण्ड़ज निकालने पर

$$A = \begin{vmatrix} 25 & 13 & 10 \\ -20 & 15 & 8 \\ 16 & -12 & 11 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 23$$

$$A = \begin{vmatrix} 25 & 13 & 10 \\ -20 & 15 & 8 \\ 16 & -12 & 11 \end{vmatrix}$$

विकर्णवत को छोड़कर शेष अवयवो को प्रतिबिम्बित लिखने पर

$$A^{-1} = \frac{1}{23}\begin{vmatrix} 25 & -20 & 16 \\ 13 & 15 & -12 \\ 10 & 8 & 11 \end{vmatrix}$$

4.7 कक्षा–8 वर्ग समीकरण/द्विघात समीकरण

गुणनखण्डों द्वारा द्विघात समीकरण का हल

वर्ग समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ **का हल (गुणनखंड विधि से)**

हम जानते हैं कि यदि $x \times y = 0$, **तो**

$x = 0$

या, $y = 0$

इसी प्रकार यदि $x(x - 4) = 0$ **है, तो**

$x = 0$

अथवा, $x - 4 = 0$

या, $x = 4$

और यदि $(x - 5)(x - 7) = 0$ **हो, तो**

$x - 5 = 0$ **या,** $x = 5$

अथवा, $x - 7 = 0$ **या,** $x = 7$

अतः यदि दो (या दो से अधिक) व्यंजकों का गुणनफल शून्य हो, तो उनमें से कम से कम एक व्यंजक का मान शून्य अवश्य होगा।

अब समीकरण $(x - 5)(x - 7) = 0$ **के बायें पक्ष के व्यंजकों का गुणा कीजिए –**

$$x^2 - 7x - 5x + (-5)(-7) = 0$$

या, $x^2 - (7 + 5)x + 35 = 0$

या, $x^2 - 12x + 35 = 0$

हम देखते हैं कि यह एक वर्ग समीकरण है जिसका रूप $ax^2 + bx + c = 0$ **का है, जहाँ** $a = 1, b = -12$ **और** $c = 35$ **है।**

इसी प्रकार

$(x - 8)(x + 6) = 0$ **के बायें पक्ष के व्यंजकों का गुणा करने पर**

$$x^2 + 6x - 8x + (-8)(6) = 0$$

या, $x^2 - 2x - 48 = 0$

उदाहरण :

हल कीजिए :

समीकरण $x^2 + 7x + 10 = 0$

$x^2 + 7x + 10 = 0$

या, $x^2 + (2+5)x + 10 = 0$

या, $x^2 + 2x + 5x + 10 = 0$

या, $x(x+2) + 5(x+2) = 0$

या, $(x+2)(x+5) = 0$

अतः $x + 2 = 0$ अथवा $x + 5 = 0$

$x = -2$ अथवा $x = -5$

यहाँ

$a = 1, b = 7, c = 10$

$a \times c = 1 \times 10 = 10$

$10 = 2 \times 5$

तथा $2 + 5 = 7$

वैदिक गणित के द्वारा हल:

सूत्र: चलनकलनाभ्याम्

अर्थ : अवकलन

अवकलन क्या है?

सूत्र : $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$

उदाहरण : $\frac{d}{dx} x^5 = 5x^{5-1} = 5x^4$

$\frac{d}{dx} x^3 = 3x^{3-1} = 3x^2$

$\frac{d}{dx} x^9 = 9x^{9-1} = 9x^8$

उपयोग- इस सूत्र का उपयोग निम्न दो दशाओं में किया जाता है

1. द्विघात के मूल ज्ञात करने के लिए
2. 3,4 व 5 की कोटि के व्यंजको के गुणनखण्ड़ करने के लिए

$ax^2 + bx + c = 0$ रूप की समीकरण द्विघात समीकरण होती है।

नियमः

- सर्वप्रथम समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करते है। और a, b और c के मान ज्ञात करते है।
- द्विघात समीकरण का विविक्तकर ज्ञात करते है अर्थात

  D= $\sqrt{b^2 - 4ac}$
- द्विघात समीकरण का अवकलन " चलनकलनाभ्याम्" सूत्र द्वारा ज्ञात करते है।

  अर्थात, $\frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$
- द्विघात समीकरण के प्रथम अवकल को द्विघात समीकरण के विविक्तकर के वर्गमूल के बराबर रखते है।

  $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$
- अब x के मान ज्ञात कर लेते है।
- यह विधि वहाॅ ज्यादा उपयोगी होती है जहाॅ द्विघात समीकरण का गुणनखण्ड़ न हो सके ।
- यह वैदिक विधि बहुत उपयोगी है तथा इसे किसी भी प्रकार की द्विघात समीकरण पर उपयोग किया जा सकता है।

वैदिक गणित द्वारा हल :

सर्वप्रथम दिए गए समीकरण का अवकल निकालते है

$\frac{d}{dx}(x^2+7x+10)$

$=2x+7$……………………………………(i)

अब ,विविक्तकर निकालेगे

D= $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ $=\pm\sqrt{7^2 - 4 \times 1 \times 10}$

$=\pm\sqrt{49 - 40}$

$=\pm\sqrt{9}$

$=\pm 3$…………………………(ii)

समीकरण (i) और (ii) के मान बराबर करने पर

$2x + 7 = \pm 3$

\+ चिन्ह लेने पर

$2x + 7 = 3$

$2x = 3 - 7$

$2x = -4$

$x = -2$

-चिन्ह लेने पर

$2x + 7 = -3$

$2x = -3 - 7$

$2x = -10$

$x = -5$

उदाहरण : हल कीजिए : समीकरण $x^2 + x - 6 = 0$

हल : $x^2 + x - 6 = 0$

$x^2 + (3 - 2)x - 6 = 0$

या, $x^2 + 3 - 2x - 6 \ = 0$

या, $x(x + 3) - 2(x + 3) = 0$

या, $(x + 3)(x - 2) \ = 0$

अतः यदि $x + 3 = 0$, **तो** $x = -3$

और यदि $x - 2 = 0$, **तो** $x = 2$

वैदिक गणित द्वारा हल:

सर्वप्रथम दिए गए समीकरण का अवकल निकालते है

$\frac{d}{dx}(x^2+x-6) = 2x+1$……………………………………(i)

अब ,विविक्तकर निकालेगे

$D = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \ = \pm\sqrt{1^2 + 4 \times 1 \times 6}$

$= \pm\sqrt{1 + 24} \ = \pm 5$…………(ii)

समीकरण (i) और (ii) के मान बराबर करने पर

$2x + 1 = \pm 5$

\+ चिन्ह लेने पर

$2x + 1 = 5$

$2x = 5 - 1$

$2x = -4$

$x = -2$

-चिन्ह लेने पर

$2x + 1 = -5$

$2x = -5 - 1$

$2x = -6$

$x = -3$

इसी प्रकार निम्न उदाहरणों को हल कर सकते है।

उदाहरण 3 : समीकरण $3x^2 + 10x + 8 = 0$ को हल कीजिए :

उदाहरण 4 : समीकरण $12x^2 - 10x - 15 = 0$ को हल कीजिए :

उदाहरण 5: समीकरण $3x^2 - 10x - 8 = 0$ को हल कीजिए :

4.8 कक्षा–8 वर्गमूल

पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल

यदि y एक पूर्ण वर्ग परिमेय संख्या है तो y को $(x)^2$अथवा $(-x)^2$के रूप मे व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ xएक परिमेय संख्या है, अर्थात

$y = x^2$ **अथवा** $y = (-x)^2$

अतः y के वर्गमूल $\sqrt{y} = x$ तथा $y^2 = -x$ दोनों है।

किसी भी पूर्ण वर्ग परिमेय संख्या $y = x^2$ के वर्गमूल $\sqrt{y} = \pm x$ होते है,जहाँ x एक परिमेय संख्या है।

विशेष :

(1)पूर्ण वर्ग संख्याओं के वर्गमूल दो विपरीत चिह्नों वाली समान संख्याएँ होती है तथा उन्हें उसके वर्गमूल कहते है।

(2)सुविधा की दृष्टि से दी हुई संख्या का एक वर्गमूल ज्ञात करके दूसरे को विपरीत चिह्न लगाकर ज्ञात कर लेते है।

गुणनखण्ड़ विधि से पूर्ण वर्ग संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात करना

उदाहरण : (i) 576

2	576
2	288
2	144
2	72
2	36
2	18
3	9
3	3

576 का वर्गमूल $= \sqrt{576}$

$$576 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$= \overline{2 \times 2} \times \overline{2 \times 2} \times \overline{2 \times 2} \times \overline{3 \times 3}$$

$\sqrt{576} = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$= 24$

अतः $\sqrt{576} = 24$

द्वन्द्व विधि वर्गमूल ज्ञात करना

विधि :

चरण I — **दी गई संख्या को दो अंको के समूहों मे दाई ओर से विभाजित करते है।**

चरण II — **यहाँ 529 को भली-भाँति भाजन की स्थिति मे लिखते है।बाई ओर से पहले समूह के बाद तिरछी रेखा खीचकर संख्या के शेष समूहों से अलग करते है ।**

चरण III — **अब हम उत्तर के पहले अंक को ज्ञात करने के लिए तैयार है ।**

इसको भागफल रेखा मे पहले समूह के ठीक ऊपर लिखते है।
यह संख्या सबसे बड़ी एक अंक की संख्या होनी चाहिए। जिसका वर्ग भाज्य रेखा के पहले समूह से कम या उसके बराबर होना चाहिए।

चरण IV — **उपरोक्त चरण में ज्ञात वर्गमूल के पहले अंक से शेष प्रक्रिया के लिए भाजक**

प्राप्त होता है।इसे दुगुना करते है।

चरण V — **पहले समूह 5 से पहले भागफल का अंक का वर्ग 4 घटाते है। शेषफल 1 को सकल भाज्य रेखा मे लिखते है।इसे तिरछी रेखा के दाई ओर भाज्य रेखा मे लिखते है।**

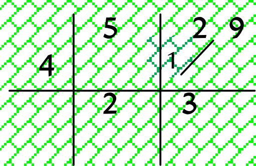
चरण VI — **वास्तविक भाज्य 12 को भाज्य 4 से विभाजित करते है।भागफल 3 को तिरछी रेखा के बाद भागफल रेखा मे लिखते है।**

चरण VII — **वास्तविक भाज्य मे सकल भाज्य भागफल का दिक् तिरछी रेखा के दाई ओर लिखते है।**

इस प्रक्रिया को समूहों के अन्त तक दोहराते है
भागफल रेखा मे संख्या का वर्गमूल 23 है।

529 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

$529 \longrightarrow \bar{5}\;\overline{29}$



उत्तर = 23

सरल भाषा में

1. सर्वप्रथम 5 के लिए एक ऐसी वर्ग संख्या सोचते हैं कि 5 से ज्यादा न हो जैसे $2^2 = 4$ जोकि 5 से 1 कम है।

2. अब 2 को 5 के नीचे रख देगे(चित्र से) और शेष को अगली संख्या के आगे रख लेगे। अर्थात 12 हो जायेगी (चित्र से)।

3. अब 2 का दुगुना करेगे 4 हो जायेगा।

4. अब 4 का भाग देगे 12 मे जितनी बार जायेगा वही उसका उत्तर होगा।

अर्थात उत्तर 23 होगा।

(ii) 2025 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

2025 का वर्गमूल $= \sqrt{2025}$

$2025 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$

या, $2025 = \overline{3 \times 3} \times \overline{3 \times 3} \times \overline{5 \times 5}$

$\sqrt{2025} = 3 \times 3 \times 5$

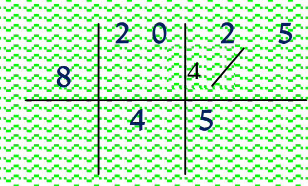
$= 45$

अतः $\sqrt{2025} = 45$

3	2025
3	675
3	225
3	75
5	25
5	5
	1

द्वन्द्व विधि से वर्गमूल ज्ञात करना

2025 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।



उत्तर = 45

सरल भाषा में

1. सर्वप्रथम 20 के लिए एक ऐसी वर्ग संख्या सोचते हैं कि 20 से ज्यादा न हो जैसे $4^2 = 16$ जोकि 20 से 4 कम है।

2. अब 4 को 20 के नीचे रख देगे(चित्र से) और शेष को अगली संख्या के आगे रख लेगे। अर्थात 42 हो जायेगी (चित्र से)।

3. अब 4 का दुगुना करेगे 8 हो जायेगा।

4. अब 8 का भाग देगे 42 मे जितनी बार जायेगा वही उसका उत्तर होगा।

अर्थात उत्तर 45 होगा।

उदाहरण : **54756 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।**

54756 **का वर्गमूल** $= \sqrt{54756}$

$54756 \quad = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 13 \times 13$

$54576 \quad = \overline{2 \times 2} \times \overline{3 \times 3} \times \overline{3 \times 3} \times \overline{13 \times 13}$

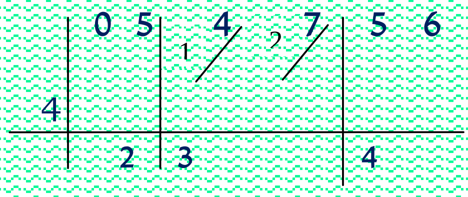
$\sqrt{54576} = 2 \times 3 \times 3 \times 13$

$= 234$

अतः $\sqrt{54576} = 234$

2	54756
2	27378
3	13689
3	4563
3	1521
3	507
13	169
13	13
0	1

उदाहरण : **54756 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।**



उत्तर = 234

सरल भाषा में

1. सर्वप्रथम 5 के लिए एक ऐसी वर्ग संख्या सोचते हैं कि 5 से ज्यादा न हो जैसे $2^2 = 4$ जोकि 5 से 1 कम है।

2. अब 2 को 5 के नीचे रख देगे(चित्र से) और शेष को अगली संख्या के आगे रख लेगे। अर्थात 14 हो जायेगी (चित्र से)।

3. अब 2 का दुगुना करेगे 4 हो जायेगा।

4. अब 4 का भाग देगे 14 मे जितनी बार जायेगा उसको नीचे लिखेगे और शेष को आगे वाले अंक के साथ में अर्थात 27 हो जायेगा।

अब 27 में $3^2 = 9$ घटायेगे अर्थात 27-9 = 18 प्राप्त होगा।

अब 18 मे 4 का भाग पुनः देगें जोकि 4 बार जायेगा।

जिस क्रम में 2,3 को लिखा था उसी क्रम में 4 को भी लिखेगें ।

अर्थात उत्तर 2 3 4 होगा।

4.9 कक्षा – 7

अनुलोम समानुपात (Direct proportion) और प्रतिलोम समानुपात(Inverse Proportion)

हम जानते हैं कि यदि दो अनुपात समान हों तो वे समानुपात कहलाते हैं। इसे हम निम्नलिखित उदाहरण के माध्यम से समझ सकते हैं। 5 पुस्तकों का मूल्य रू 100.00 है तो पुस्तकों का मूल्य रू 300.00 और 3 पुस्तकों का मूल्य रू 60.00 होगा।

पेंसिलों की संख्या x	18	36	54	72	9
पेंसिलों का मूल्य रूपयों में y	20	40	60	80	10
$\frac{x}{y}$	$\frac{18}{20}=\frac{9}{10}$	$\frac{39}{40}=\frac{9}{10}$	$\frac{54}{60}=\frac{9}{10}$	$\frac{72}{80}=\frac{9}{10}$	$\frac{9}{10}$

हम देखते हैं कि :

(1) पेंसिलो की संख्या दो गुनी होने पर, उनका संगत मूल्य भी दो गुना हो जाता है।

(2) पेंसिलों की संख्या तीन गूनी हो जाने पर, उनका संगत मूल्य भी तीन गुना हो जाता है।

(1) तथा (2) से हम देखते हैं कि पेन्सिलों की संख्या में जिस अनूपात में वृद्धि हो रही है। उसी अनुपात में उनके मूल्यों में भी वृद्धि हो रही है। जैसे :

या 36 : 54 :: 40 : 60

36 पेंसिलों 54 पेंसिलों, रू 40, रू 60 अनुलोम समानुपात में हैं।

अतः हम कह सकते हैं कि पेंसिलों की संख्या और उनके मूल्य में अवलोंम समानुपात का संबंध है।

इसी प्रकार 54 पेंसिलों और 72 पेंसिलों तथा रू 60 और रू 80 अनुलोम अमानुपात में हैं, अर्थात्

या, 54 : 72 :: 60 : 80

सारणी को देखकर हम यह कह सकते हैं कि $\frac{\text{पेंसिलों की संख्या}}{\text{पेंसिलों का मूल्य}}$ का मान प्रत्येक स्थिति में $\frac{9}{10}$ अर्थात् समान हैं। अतः $\frac{x}{y}$ का मान अचर है। इसे हम $\frac{x}{y}=k$ भी कह सकते हैं। यहाँ $k=\frac{9}{10}$

उदाहरण 1 : नीचे दी गई सारणी में क्रमशः गेदों की संख्या और उनके संगत मूल्य प्रदर्शित हैं:

गेदों की संख्या x	4	3	2	1
रूपयों में मूल्य y	20	15	10	5
$\frac{x}{y}$	$\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$	$\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$	$\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

सारणी देखकर बताइए :

(1) 4 गेंदों का मूल्य रु 20 हैं, 2 गेंदों का मूल्य कितना है ?

(2) इसी दर से 1 गेंद का मूल्य कितना है ?

हम देखते हैं कि 2 गेंदों की संख्या, 4 गेदों की संख्या की आधी है और उसका संगत मूल्य भी रु 20 आधा रु 10 है। इसी प्रकार 1 गेंद 4 गेदों की संख्या की चौथाई है। अतः 1 गेंद का मूल्य भी रु 20 चौथाई = रु 5 होगा।

इस प्रकार जैसे-जैसे गेंदों की संख्या घटती है, संगत मूल्य में भी उसी अनुपात में कमी आ जाती है। इस संबंध को अनुलोम संबंध कहते हैं। यहाँ 4 गेंद, 2 गेंद, रु 20, रु 10 अनुलोम समानुपात में हैं, अर्थात्

या, 4 : 2 :: 20 : 10

उपर्युक्त सारणी से भी यह स्पष्ट है कि $\frac{x}{y}=\frac{1}{5}$ अचर है अर्थात् $\frac{x}{y}=k$, यहाँ $k=\frac{1}{5}$

प्रयास कीजिए :

1. 2 किलोग्राम आलू का मूल्य रु 20 है। 4 किलोग्राम आलू का मूल्य बताइए।
2. एक मजदूर एक दिन में 3 मीटर लम्बी दीवार तैयार करता है। 3 मजदूर एक ही दिन में कितने मीटर लम्बी दीवार बनायेंगे ?

अतः निष्कर्ष निकलता है कि :

1. जब दो राशियाँ x और y इस प्रकार से संबंधित हों कि x के बढ़ने पर, दूसरी राशि y में उसी अनुपात में वृद्धि हो अथवा x के घटने पर y में भी उसी अनुपात में कमी हो तो ये राशियाँ 'अनुलोम समानुपाती ' कहलाती हैं।

2. $\frac{x}{y}$ का मान अचर होता है।

अनुलोम समानुपात का संबंध तीरों को एक ही दिशा में लगाकर निम्नलिखित ढंग से व्यक्त कर सकते हैंः

(1) **पेंसिलों की संख्या** **पेंसिलों का मूल्य (रूपयों में)**

पेंसिलों की संख्या	पेंसिलों का मूल्य (रूपयों में)
10 ↓	9 ↓
20	18

अर्थात 10 : 20 :: 9 : 18

(2) गेंदों की संख्या **गेंदों का मूल्य (रूपयों में)**

गेंदों की संख्या	गेंदों का मूल्य (रूपयों में)
4 ↓	20 ↓
2	10

अर्थात 4 : 2 :: 20 : 10

उदाहरण 1ः एक रेलगाड़ी 2 घंटे में 120 किमी दूरी करती है। उसी चाल से वह 5 घंटे में कितनी दूरी तय करेगी ?

हल ः समय की अधिकता के साथ तय की गई दूरी भी अधिक होगी, अतः यहाँ अनुलोम अमानुपात का संबंध है। मान लिया 5 घंटे में x किमी दूरी तय होगी।

अतः समय(घंटे में) तय की गई दूरी(किमी में)

समय(घंटे में)	तय की गई दूरी(किमी में)
2 ↓	120 ↓
5	x

अर्थात 2 : 5 :: 120 : x

या, $2x = 5 \times 120$

$$x = \frac{5\times120}{2} = 300$$

अर्थात दूरी $= 300$ **किमी**

वैदिक विधि द्वारा हल :

सूत्रः ऊर्ध्व तिर्यगभ्याम

इस सूत्र का उपयोग संख्याओं की तिर्यक गुणा करने मे करते है।

$$\frac{M_1D_1H_1E_1}{P_1W_1} = \frac{M_2D_2H_2E_2}{P_2W_2}$$

$$\frac{2}{120} = \frac{5}{x}$$

$$x = \frac{5 \times 120}{2}$$

$x = 300$ किमी

जहॉ

M = पुरूष ,महिला,बच्चे या कोई वस्तु

D= दिन

H=समय /चाल

E=क्षमता

P=मूल्य

W=भार,लम्बाई,चौड़ाई,ऊँचाई,गहराई, दूरी

उदाहरण 2 :यदि 6 कलमों का मूल्य 24रू है, तो 7 कलमों का मूल्य कितना होगा ?

हलः कलमों की संख्या और उनके संगत मूल्य में अनुलोम समानुपात का संबंध है।

मान लिया 7 कलमों का मूल्य xरू होगा।

(1) कलमों की संख्या	मूल्य (रूपयों में)
6 ↓	24 ↓
7	x

अर्थात $6 : 7 :: 24 : x$

या, $6x = 7 \times 24$

$$x = \frac{7 \times 24}{6} = 28$$

अर्थात मूल्य 28 रूपये है।

वैदिक विधि द्वारा हलः

सूत्रः ऊर्ध्व तिर्यगभ्याम

इस सूत्र का उपयोग संख्याओं की तिर्यक गुणा करने मे करते है।

$$\frac{M_1D_1H_1E_1}{P_1W_1} = \frac{M_2D_2H_2E_2}{P_2W_2}$$

$$\frac{6}{24} = \frac{7}{x}$$

$$x = \frac{7\times24}{6}$$

$x = 28$ रू मूल्य।

जहॉ

M = पुरूष ,महिला,बच्चे या कोई वस्तु

D= दिन

H=समय /चाल

E=क्षमता

P=मूल्य

W=भार,लम्बाई,चौड़ाई,ऊँचाई,गहराई, दूरी

उदाहरण 3: 5 मजदूरों की मजदूरी 1250रू है। 8 मजदूरों के लिए कितनी मजदूरी चाहिए ?

(1) **मजदूरों की संख्या**	**मूल्य (रूपयों में)**
5 ↓	1250 ↓
8	x

अर्थात $5 : 8 :: 1250 : x$

या, $5x = 8 \times 1250$

$$x = \frac{8\times1250}{5} = 2000$$

अर्थात 8 मजदूरों को 2000रू चाहिए।

वैदिक विधि द्वारा हलः

सूत्रः ऊर्ध्व तिर्यगभ्याम

इस सूत्र का उपयोग संख्याओं की तिर्यक गुणा करने मे करते है।

$$\frac{M_1D_1H_1E_1}{P_1W_1} = \frac{M_2D_2H_2E_2}{P_2W_2}$$

$$\frac{5}{1250} = \frac{8}{x}$$

$$x = \frac{8\times1250}{5}$$

$$x = 2000 \text{ रू}$$

अर्थात 8 मजदूरों को 2000रू चाहिए।

जहॉ

M = पुरूष ,महिला,बच्चे या कोई वस्तु

D= दिन

H=समय /चाल

E=क्षमता

P=मूल्य

W=भार,लम्बाई,चौड़ाई,ऊँचाई,गहराई, दूरी

उदाहरण 4 : 25 मजदूर एक सप्ताह में 7.5 किमी लम्बी सड़क बनाते है। कितने मजदूर उतने ही समय में 10.2 किमी लम्बी सड़क बना लेगें ?

(1) **मजदूरों की संख्या**	**मूल्य (रूपयों में)**
25 ↓	7.5 ↓
x	10.2

अर्थात 25 : x :: 7.5: 10.2

या, $7.5x = 25 \times 10.2$

$$x = \frac{25\times10.2}{7.5} = 34$$

अर्थात 34 मजदूर 10.2 किमी सड़क बना लेगें।

वैदिक विधि द्वारा हलः

सूत्रः ऊर्ध्व तिर्यगभ्याम

इस सूत्र का उपयोग संख्याओं की तिर्यक
गुणा करने मे करते है।

$$\frac{M_1D_1H_1E_1}{P_1W_1} = \frac{M_2D_2H_2E_2}{P_2W_2}$$

$$\frac{25}{7.5} = \frac{x}{10.2}$$

$$x = \frac{25\times10.2}{7.2}$$

$$x = 34$$

जहॉ

M = पुरूष ,महिला,बच्चे या कोई वस्तु

D= दिन

H=समय /चाल

E=क्षमता

P=मूल्य

W=भार,लम्बाई,चौड़ाई,ऊँचाई,गहराई, दूरी

उदाहरण एक छात्रावास में 50 छात्रों के लिए 40 दिनों की भोजन सामग्री है ।यदि छात्रावासमें 30 छात्र और आ जाएं तो भोजन सामग्री कितने दिनों में समाप्त हो जाएगी?

हलः 30 छात्रों के और आ जाने से छात्रावास के छात्रों की संख्या =50+30 =80

निश्चित भोजन सामग्री को कम छात्र अधिक दिनों में तथा अधिक छात्र कम दिनों में समाप्त करेगें।

अतः इस प्रश्न में भोजन सामग्री और छात्र संख्या के बीच प्रतिलोम समानुपाती संबंध है।

मान लिया भोजन सामग्री x दिनों में समाप्त हो जाएगी ।

छात्रों की संख्या	**भोजन सामग्री के समाप्त होने के दिनों की संख्या**
50 ↓	40 ↑
80	x

$50 : 80 :: x : 40$

$80x = 50 \times 40$

$x = \frac{50 \times 40}{80}$

$x = 25$

अभीष्ट दिनों की संख्या = 25

वैदिक विधि द्वारा हलः

सूत्रः ऊर्ध्व तिर्यगभ्याम

इस सूत्र का उपयोग संख्याओं की तिर्यक गुणा करने मे करते है।

$$\frac{M_1 D_1 H_1 E_1}{P_1 W_1} = \frac{M_2 D_2 H_2 E_2}{P_2 W_2}$$

$50 \times 40 = (50 + 30) \times D_2$

$2000 = 80 \times D_2$

$D_2 = \frac{2000}{80}$

$D_2 = 25$

अर्थात दिनों की संख्या =25

जहॉ

M = **पुरूष ,महिला,बच्चे या कोई वस्तु**

D= **दिन**

H=**समय /चाल**

E=**क्षमता**

P=**मूल्य**

W=**भार,लम्बाई,चौड़ाई,ऊँचाई,गहराई, दूरी**

पंचम अध्याय
निष्कर्ष एवम सुझाव

5.1 निष्कर्ष

प्रस्तुत अध्ययन के फलस्वरूप निम्नलिखित निष्कर्ष प्राप्त हुए है-

- वैदिक गणित 16 सूत्री सिद्धांतो पर आधारित है। अत: इसके सूत्र को निरंतर अभ्यास द्वारा स्मरण करने की आवश्यकता है।
- वैदिक गणित का प्रयोग उच्च कक्षा कक्षाओं में भी लागू किया जा सकता है।
- प्रस्तुत शोध अध्ययन के वैदिक गणित तथा परंपरागत गणित शिक्षण में विशेष अंतर नही पाया।
- प्रस्तुत शोध अध्ययन के अनुसार परंपरागत गणित शिक्षण लगातार अभ्यास में होने के कारण विद्यार्थियों के अभ्यास में है।
- वैदिक गणित के द्वारा जटिल समस्याओं को आसानी से हल किया जा सकता है।
- वैदिक गणित के द्वारा छात्रों की मानसिक शक्ति का विकास होता है।
- कम समय में छात्रों को गणितीय समस्या से मुक्त किया जा सकता हैं।
- वैदिक गणित के प्रयोग से प्रतियोगी छात्रों को समय प्रंबधन में सहयोग मिलता हैं।
- प्रस्तुत शोध अध्ययन मे गणितीय संक्रियाएँ हल करने में परंपरागत गणित शिक्षण से कम समय लगता हैं।

5.2 शैक्षिक उपादेयता

वैदिक गणित के अध्ययन का उद्देश्य छात्रों में गणित विषय के प्रति रुचि उत्पन्न करना हैं। वर्तमान गणित शिक्षण के भय से छात्रों को मुक्त कराना है। छात्रो को मुक्त कराना हैं। छात्रों को सरल व मनोरंजक ढंग से गणित विषय का अध्ययन करवाना हैं। वैदिक गणित छात्रो की गणितीय समस्या का निराकरण करने में सक्षम हैं। वर्तमान समय में गणित विषय का अध्ययन जीवन के प्रत्येक क्षेत्र में लाभकारी है परन्तु गणित की शैक्षिक पध्दतियों के कठिनाई के फलस्वरुप हजारों विद्यार्थी गणित शिक्षण

से भाग रहे हैं। हाईस्कूल स्तर पर सबसे अधिक फेल होने वाले छात्रों का प्रतिशत गणित में ही हैं। वैदिक गणित का अध्ययन कर हम इन त्रुटियों को दूर करने का प्रयास कर रहें।

वैदिक गणित का अध्ययन प्राथमिक माध्यमिक तथा उच्च स्तरीय कक्षाओं के लिये लाभकारी हैं। इसके सरल सूत्र एवम पध्दतियों का अध्ययन कर छात्र से गणितीय समस्या को दूर किया जा सकता हैं। इसके अध्ययन के फलस्वरुप छात्रों की तर्कशक्ति एवम मानसिक शक्ति को बढाया जा सकता हैं । इस पुस्तक का अध्ययन छात्रों के साथ- साथ शिक्षको के लिए भी उपयोगी हैं। इसके द्वारा शिक्षक अपने शिक्षण में गुणात्मक सुधार कर सकता हैं। इस शोध का उद्देश्य गणित शिक्षण में गुणात्मक सुधार करना है। किससे छात्रों के उज्ज्वल भविष्य का निर्माण हो सके ।

5.3 अध्ययन के सुझाव

1-वैदिक गणित के क्षेत्र में अधिकाधिक अनुसंधान किए जाने की आवश्यकता है ताकि-

- वैदिक गणित के अन्य गूढ रहस्यों पर से पर्दा उठाया जा सके ।
- अधुनिक गणित में प्रयोग संबंधी नवीन संभावनाओं को उजागर किया जा सके ।
- संगणक को और अधिक तीव्र बनाने हेतु वैदिक गणित के सूत्रों पर आधारित सॉफ्टवेयर निर्माण किया जा सके ।

2-पंरपरागत शिक्षण व्यवस्था में संस्कृत को गणित के विद्यार्थियों के लिये अनिवार्य किया जाना चाहिए अथवा इन धाराओं गणित तथा संस्कृत को एक किया जाना चाहिए ताकि विद्यार्थियों में वैदिक गणित के सूत्रों की समझ बेहतर हो सके ।

3-वैदिक गणित की विभिन्न कार्यशालाओं तथा प्रशिक्षण कार्यक्रमों का आयोजन किया जाना चाहिए जिससे यह केवल विद्यार्थियों के लिये ही नही अपितु अध्यापकों के लिये भी शिक्षण कार्य में गुणात्मक सुधार हेतु सहायक सिध्द हो सके ।

4-गणित शिक्षण में वैदिक गणित का प्रयोग निश्चित ही नवीन आयामों को स्थापित करेगा।

5-वैदिक गणित तकनीकी के माध्यम से सीखना विद्यार्थियों के लिये अधिक सहायक होगा।

5.4 भावी शोध के निमित्त सुझाव

कोई भी शोध अंतिम नही होता। शोधकर्ता ने अनुभव किया कि वर्तमान में इस समस्या से विभिन्न आयामों पर अनुसंधान किया जा सकता है।शोधकर्ता ने अपने शोध में समस्या के सभी पहलुओं का पूर्ण रूप से अध्ययन किया परंतु शोधकर्ता ने समयाभाव के कारण सीमित कर दिया गया है। प्रस्तुत शोध में अभी बहुत सी संभावनाएँ शेष है जो निम्न हो सकती है-

1. प्रस्तुत शोध हाईस्कूल के पाठ्यक्रम में सम्मिलित सामान्य गणित और वैदिक गणित का तुलनात्मक अध्ययन।
2. माध्यमिक स्तर के विद्यार्थियों द्वारा गणितीय संक्रियाओं को हल करने में लगा समय के विषय में अध्ययन।
3. प्रतियोगी छात्रों पर वैदिक गणित के प्रभाव का अध्ययन।
4. इण्टरमीडिएट स्तर के पाठ्यक्रम में वैदिक गणित का अध्ययन।
5. रेखा गणित में वैदिक गणित का अध्ययन वैदिक सूत्र द्वारा ज्यामितीय का अध्ययन।
6. बीज गणित में वैदिक गणित सूत्रों के द्वारा बीज गणितीय संक्रियाओं के समस्याओं का अध्ययन।
7. वैदिक गणित पढने वाले तथा सामान्य गणित पढने वाले छात्र-छात्राओं की बुद्धि लब्धि का तुलनात्मक अध्ययन
8. इंटरमीडिएट के विद्यार्थिओं में वैदिक गणित के प्रति जागरूकता का अध्ययन।
9. गणित अध्यापकों में वैदिक गणित के प्रति जागरूकता का अध्ययन।
10. वैदिक गणित का सीबीएसई पाठ्यक्रम में प्रभाव का अध्ययन।

सन्दर्भ ग्रन्थ सूची

- तीर्थ, भारती कृष्ण (2018)। *वैदिक गणित*। नई दिल्ली: मोतीलाल बनारसीदास।
- शंकराचार्य, जगद्गुरू (2017)। *वैदिक गणित*। हरियाणा: विद्या भारती संस्कृति शिक्षा संस्थान संस्कृति भवन, कुरुक्षेत्र।
- विश्वकर्मा, कैलाश (1992)। *वैदिक गणित समय दृष्टि*। कानपुर: असोका प्रिंटर्स।
- विश्वकर्मा, कैलाश (2011)। *वैदिक गणित विहंगम दृष्टि*। नई दिल्ली: शिक्षा संस्कृति उत्थान न्यास।
- राय, पारसनाथ एवं राय, डॉ.सी.पी. (2015)। *अनुसंधान परिचय*। आगरा: लक्ष्मी नारायण अग्रवाल।
- ठाकुर, राजेश कुमार (2017)। *वैदिक गणित*। नई दिल्ली: प्रभात पेपर बैक्स।
- कुमारी, अंजना (1999)। *आठवीं कक्षा के विद्यार्थियों की पठनीय आदतों एवं रुचियों को प्रभावित करने वाले कारकों का अध्ययन एवं भावी कार्य योजना का . विकास*। पी.एच.डी. शोधकार्य, डी.ई.आई. डीम्ड यूनिवर्सिटी, दयालबाग, आगरा। http://hdl.handle.net/10603/209563
- नागर, देवेन्द्र कुमार (2015)। *माध्यमिक स्तर के गणित शिक्षकों द्वारा प्रयुक्त शिक्षण विधियों एवं गणित के अच्छे शिक्षकों की विशेषताओं का अध्ययन करना*। पी.एच.डी. शोधकार्य, वनस्थली यूनिवर्सिटी, राजस्थान।

  https://shodhganga.inflibnet.ac.in/handle/10603/139597

- प्रसाद, गिर्राज (2016)। *वैदिक गणित का उच्च प्राथमिक स्तर के विद्यार्थियों की मानसिक योग्यता एवं शिक्षित निष्पत्ति पर प्रभाव.. एक अध्ययन*। पी.एच.डी. शोधकार्य, आई. ए. एस. ई. डीम्ड विश्वविद्यालय, सरदार शहर, राजस्थान।

- कुमार, हरीश (2010)। *माध्यमिक स्तर के एजुसैट से गणित विषय पढ़ने वाले व नहीं पढ़ने वाले विद्यार्थियों की गणितीय अभिक्षमता, तार्किक अभिक्षमता एवं गणितीय निष्पति का अध्ययन*। एम. फिल. शोधकार्य, आई. ए. एस. ई. डीम्ड विश्वविद्यालय, सरदार शहर, राजस्थान।
- कुमारी, मंजू (2005)। *मलिन बस्तियों में निवास करने वाले विशिष्ट जाति समूह की लड़कियों का शैक्षिक व्यावसायिक स्तर तथा उनकी शिक्षा के प्रति अभिभावकों का अभिमत एक अध्ययन*। पी.एच.डी. शोधकार्य, डी.ई.आई. डीम्ड विश्वविद्यालय, दयालबाग, आगरा।
  http://hdl.handle.net/10603/207595
- रामदास (2014)। *उच्च शिक्षा स्तर पर शिक्षकों के व्यक्तित्व एवं विषय सजगता के संदर्भ में कंप्यूटर एवं इण्टरनेट अनुप्रयोग सम्बंधी कौशलों का अध्ययन*। पी.एच.डी. शोधकार्य, लखनऊ विश्वविद्यालय, लखनऊ।
  http://hdl.handle.net/10603/42958
- अग्रवाल, तनु (1999)। *विशिष्ट समूहों की शैक्षिक उपलब्धि के मनोसामाजिक संज्ञानात्मक तथा असंज्ञानात्मक कारक-एक विश्लेषणात्मक अध्ययन*। पी.एच.डी. शोधकार्य, डी.ई.आई. डीम्ड विश्वविद्यालय, दयालबाग, आगरा। http://hdl.handle.net/10603/207692
- Bumtaria, Dharmendra A) 2019.(*Construction and effectiveness of interactive teaching model of vedic mathematics*. Doctoral dissertation, Saurashtra University. Rajkot.
  https://shodhganga.inflibnet.ac.in/handle/10603/269082

- Sengupta, Diganta (2016). *Approach towards designing fast arithmetic circuits using ancient Vedic mathematics sutras*. Doctoral dissertation, Jadavpur University. Kolkata. https://shodhganga.inflibnet.ac.in/handle/10603/215256

- Sahaya, Jiji (2012). *A study of effectiveness of teaching Vedic mathematics on students achievement*. Doctoral dissertation, Shri Jagdish Prasad Jhabarmal Tibarewala University. Vidyanagari, Jhunjhunu, Rajasthan.
http://hdl.handle.net/10603/21247

- Doshi, Mitesh J (2014). *Effect of Vedic mathematical skills at class Vil*. Doctoral dissertation Sardar Patel University, Vallabh Vidyanagar.
http://hdl.handle.net/10603/34793

- Rastogi, Prabha S.) 2019 .(*The contribution of vedic mathematics in advance calculus*. Doctoral dissertation, Shri Jagdish Prasad Jhabarmal Tibarewala University. Vidyanagari, Jhunjhunu, Rajasthan.
https://shodhganga.inflibnet.ac.in/handle/10603/258162

- Shrimali, Tejash R (2013). *A study of effectiveness of Vedic maths on 'expansion unit of maths subject of std.8*. Doctoral dissertation, Kadi Sarva Vishwavidyalaya, Gandhinagar.
http://hdl.handle.net/10603/40147

- Vasant,V. Shastri (2019).Evaluation of yoga pranayam and vedic maths methods in the management of math anxiety and cognitive skills in school children.Doctoral dissertation, Swami Vivekananda Yoga Anusandhana Sansthana, Bangalore.

  http://hdl.handle.net/10603/227185

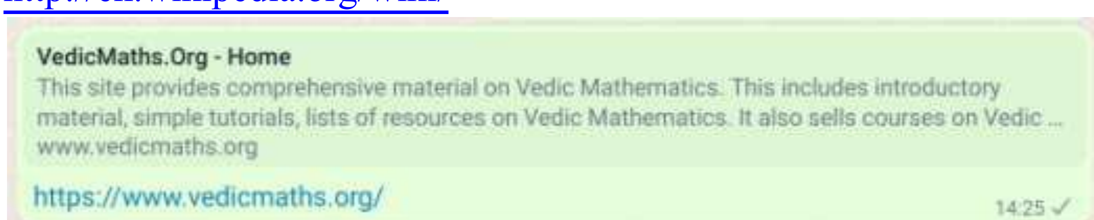
- कुशवाहा, कुसुम (2018)। *वैदिक गणित शिक्षण पद्धति की वर्तमान गणित शिक्षण में उपयोगिता*। अप्रकाशित लघु शोध, अतर्रा पी० जी० कॉलेज, अतर्रा।
- कुशवाहा, सुशील कुमार (2019)। *उच्च प्राथमिक विद्यालयों में वैदिक गणित की प्रभावशीलता का अध्ययन*। अप्रकाशित लघु शोध, अतर्रा पी०जी० कॉलेज, अतर्रा।
- वर्मा, विनीता (2011)। *वैदिक गणित शिक्षण पद्धति का वर्तमान गणित शिक्षण में उपयोगिता का समीक्षात्मक अध्ययन*। अप्रकाशित लघु शोध, अतर्रा पी०जी० कॉलेज, अतर्रा।
- संतराम (2021) *वैदिक गणित शिक्षण पद्धति की वर्तमान गणित शिक्षण में उपयोगिता*। अप्रकाशित लघु शोध, अतर्रा पी०जी० कॉलेज, अतर्रा।

Wediography

Vedic Mathematics



http://en.wikipedia.org/wiki/

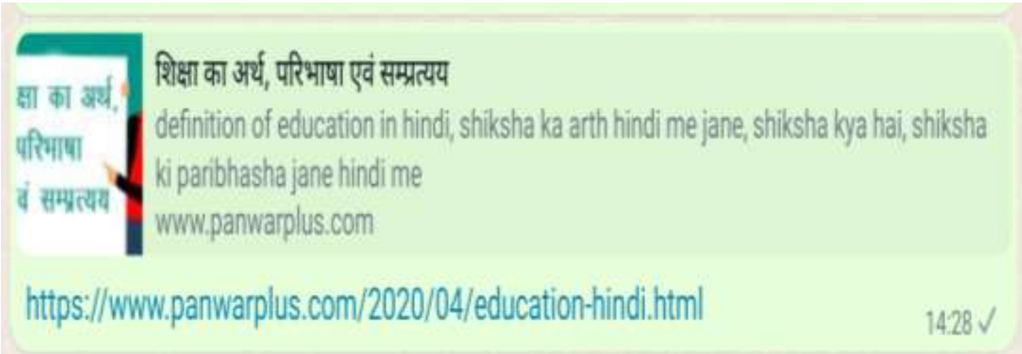


www.vedicmaths.org

- शिक्षा विकास की प्रक्रिया



https://www.scotbuzz.org/2018/10/shiksha.html#toco



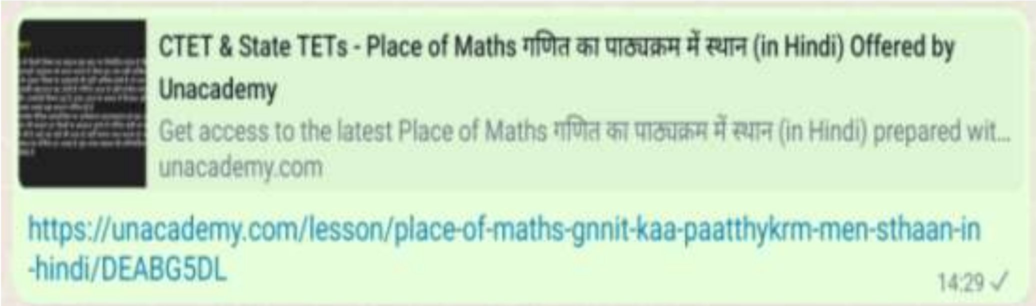
https://www.panwarplus.com/2020/04/education-hindi.html

- भारत में शिक्षा के स्तर



https://www.scotbuzz.org/2021/02/bharat-mein-shiksha-ke-prakar.html

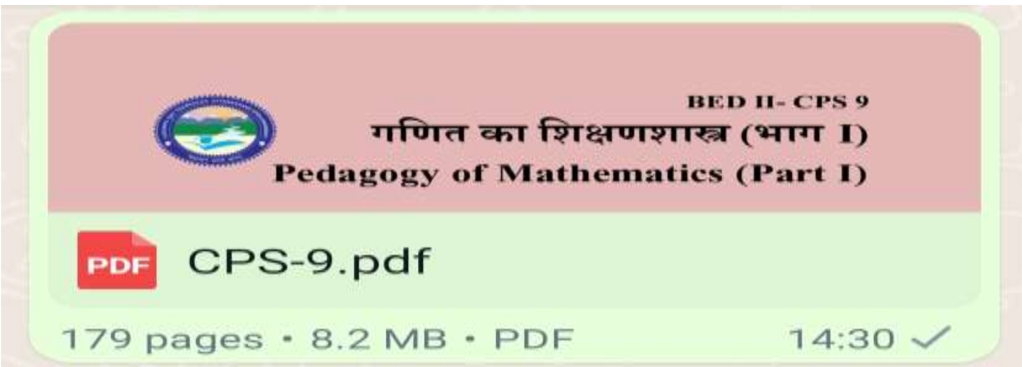
- शिक्षा में गणित का स्थान, गणित शिक्षण का महत्व, गणित का इतिहास



https://unacademy.com/lesson/place-of-maths-gnnit-kaa-paatthykrm-men-sthaan-in-hindi/DEABG5DL



https://hi.wikipedia.org/wiki/%E0%A4%97%E0%A4%A3%E0%A4%BF%E0%A4%A4

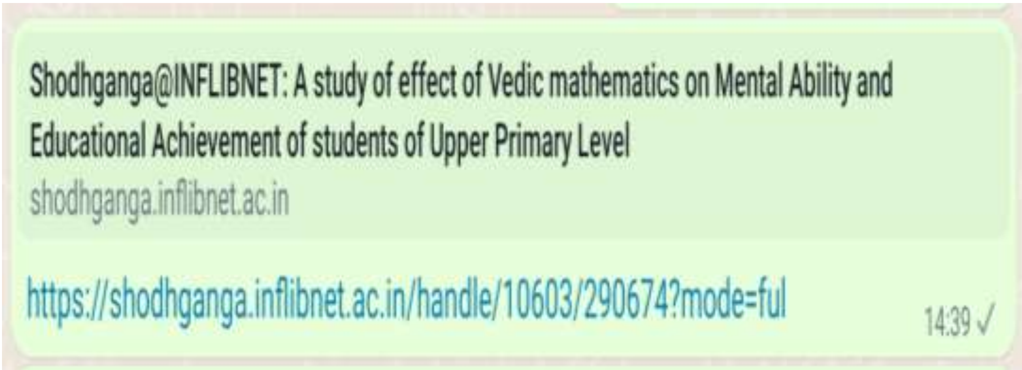


https://www.uou.ac.in/sites/default/files/bed17/CPS-9.pdf

- गणित शिक्षण की विधियाँ

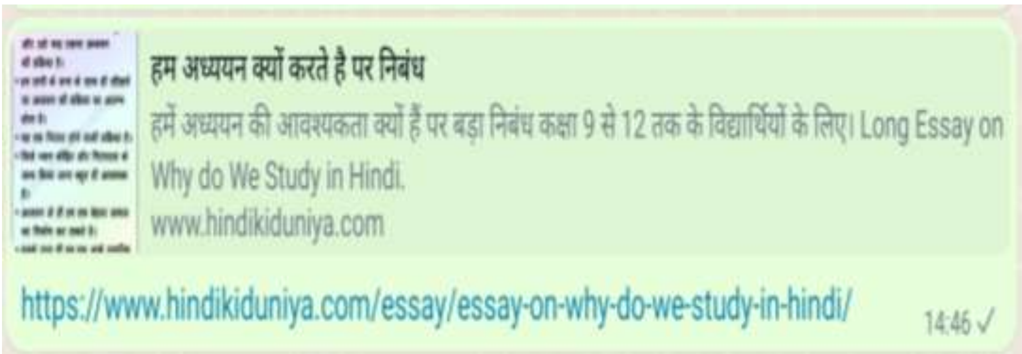


https://pathshalaclasses.in/uploads/ebook/1594020458.pdf



https://shodhganga.inflibnet.ac.in/handle/10603/290674?mode=ful

- अध्ययन की आवश्यकता

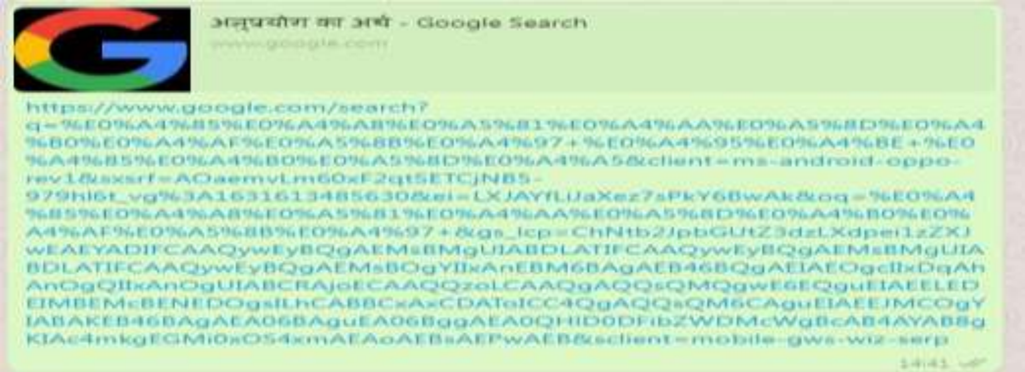


https://www.hindikiduniya.com/essay/essay/-on-why-do-we-study-in-hindi/

- व्यावहारिक अनुप्रयोग



https://www.google.com/search?q=%E0%A4%B5%E0%A5%8D%E0%A4%AF%E0%A4%BE%E0%A4%B5%E0%A4%B9%E0%A4%BE%E0%A4%B0%E0%A4%BF%E0%A4%95+%E0%A4%95%E0%A4%BE+%E0%A4%85%E0%A4%B0%E0%A5%8D%E0%A4%A5&client=ms-android-oppo-rev1&sxsrf=AOaemvKrVi9WU7Ct1T6GXyTWZhGF9Ih44g%3A1631613501464&ei=PXJAYYbvG7Gymgehv6XoBg&oq=%E0%A4%B5%E0%A5%8D%E0%A4%AF%E0%A4%BE%E0%A4%B5%E0%A4%B9%E0%A4%BE%E0%A4%B0%E0%A4%BF%E0%A4%95+%E0%A4%95%E0%A4%BE+%E0%A4%85%E0%A4%B0%E0%A5%8D%E0%A4%A5&gs_lcp=ChNtb2JpbGUtZ3dzLXdpei1zZXJwEAEYADIFCAAQywEyBggAEAcQHjIGCAAQBxAeMgYIABAHEB4yBggAEAcQHjIGCAAQBxAeMgYIABAHEB4yBggAEAcQHjoECAAQRzoJCAAQExBGEPkBOgQIABATOggIABAHEB4QEzoICAAQDRAeEBM6BwgAEAoQywE6CAgAEA0QBRAeOggIABAIEA0QHjoECAAQDToGCAAQDRAeOgoIABANEAUQHhATOgoIABDLARBGEPkBUNuqDVi2vQ5g09YOaAVwAXgCgAGMA4gBlyeSAQgwLjIuMTYuMpgBAKABA



https://www.google.com/search?q=%E0%A4%85%E0%A4%A8%E0%A5%81%E0%A4%AA%E0%A5%8D%E0%A4%B0%E0%A4%AF%E0%A5%8B%E0%A4%97+%E0%A4%95%E0%A4%BE+%E0%A4%85%E0%A4%B0%E0%A5%8D%E0%A4%A5&client=ms-android-oppo-rev1&sxsrf=AOaemvLm60xF2qtSETCjNB5-979hl6t_vg%3A1631613485630&ei=LXJAYfLiJaXez7sPkY6BwAk&oq=%E0%A4%85%E0%A4%A8%E0%A5%81%E0%A4%AA%E0%A5%8D%E0%A4%B0%E0%A4%AF%E0%A5%8B%E0%A4%97+&gs_lcp=ChNtb2JpbGUtZ3dzLXdpei1zZXJwEAEYADIFCAAQywEyBQgAEMsBMgUIABDLATIFCAAQywEyBQgAEMsBMgUIABDLATIFCAAQywEyBQgAEMsBOgYIIxAnEBM6BAgAEB46BQgAEIAEOgcIIxDqAhAnOgQIIxAnOgUIABCRAjoECAAQQzoLCAAQgAQQsQMQgwE6EQguEIAEELEDEIMBEMcBENEDOgsILhCABBCxAxCDAToICC4QgAQQsQM6CAguEIAEEJMCOgYIABAKEB46BAgAEA06BAguEA06BggAEA0QHlD0DFibZWDMcWgBcAB4AYAB8gKIAc4mkgEGMi0xOS4xmAEAoAEBsAEPwAEB&sclient=mobile-gws-wiz-serp

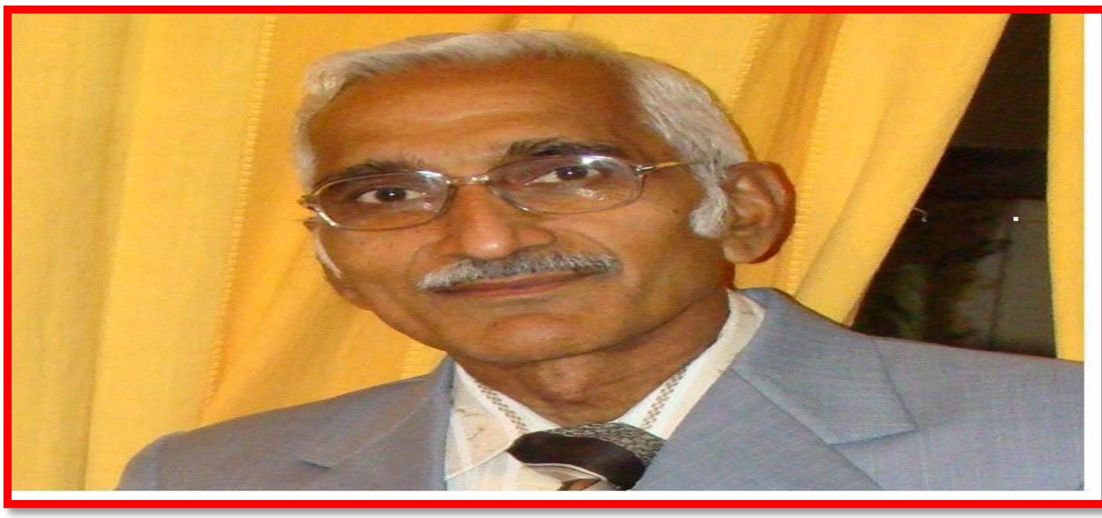
- विषयवस्तु विश्लेषण विधि



https://www.samajkaryshiksha.com/2021/06/qualitative-research-method.html?m=1

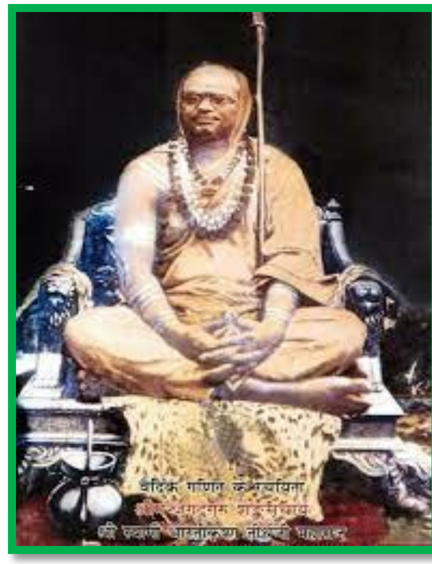
परिशिष्ट-अ वैदिक गणितज्ञ








डॉ० कैलाश विश्वकर्मा







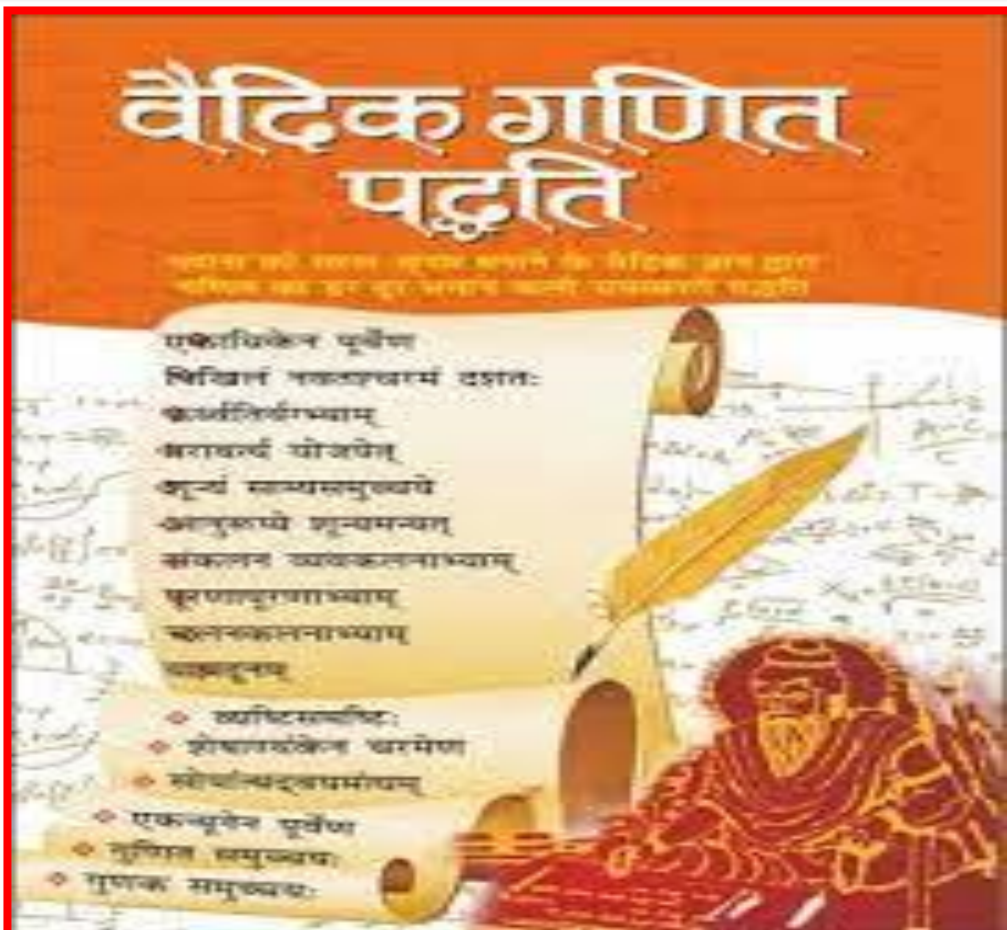
परिशिष्ट-ब वैदिक गणित पुस्तकें








विद्यार्थियों हेतु
वैदिक गणित
राजेश कुमार ठाकुर

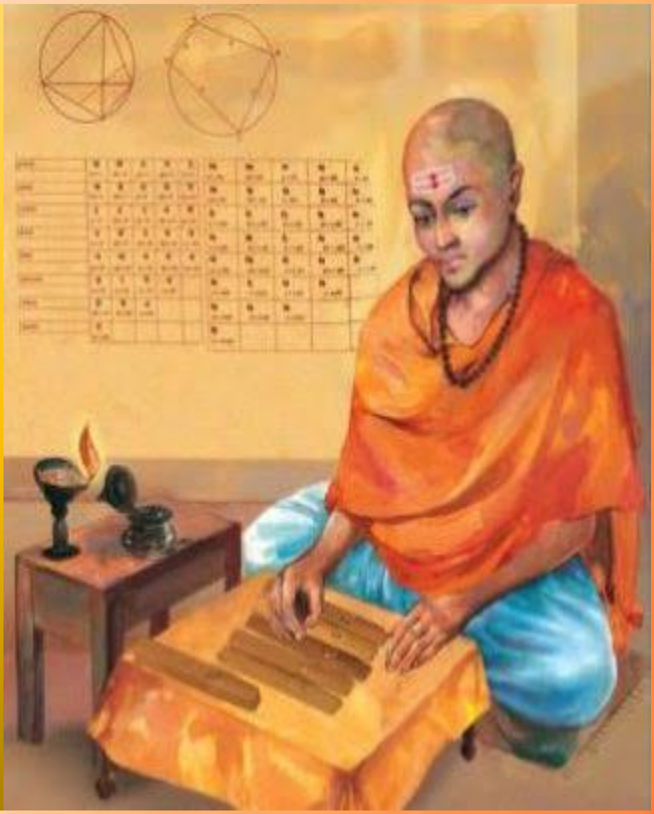

वैदिक गणित पद्धति

वैदिक गणित के व्यावहारिक अनुप्रयोग: एक अध्ययन

बहुभिर्विप्रलापैः किम् त्रैलोक्ये सचराचरे।
यत्किंचिद्वस्तु तत्सर्व गणितेन विना न हि।।

– महावीराचार्य .

अर्थात् बहुत अधिक प्रयास करने से क्या लाभ है। इस सचराचर जगत में जो कुछ भी वस्तु है वह सब गणित के बिना समझना सम्भव ही नहीं है।



ISBN 978-93-100-0122-8

9 789310 001228